

# 修士学位論文

題 名

動ひずみ測定を用いた振動入力同定精度向上  
に関する研究

指導教授

吉村 卓也

教授

平成27年 2月 18日 提出

首都大学東京大学院

理工学研究科

機械工学

専攻

学修番号 13883305

氏 名 糸藤 匠

## 学位論文要旨（修士（工学））

論文著者名 糸藤 匠

論文題名：動ひずみ測定を用いた振動入力同定精度向上に関する研究

機械の稼働状況においては、多くの場合構造物各部へ様々な外力が働き、振動や騒音が生じている。時としてこれらの振動・騒音は機械の使用者や機械の性能に対して悪影響を及ぼす。特に自動車や建設機械は、運転時にエンジンからの振動や路面の凹凸による振動によって乗員に不快感を与えることから、特に低振動・低騒音が求められている。近年、振動・騒音の対策検討では伝達経路解析 (Transfer Path Analysis, 以下 TPA) が盛んに用いられている。

TPA では対象とする系を受動系と駆動系に分離し、各系に作用する入力と入力点と評価点間の周波数応答関数の積として応答に占める寄与を評価する。これにより寄与の大きい振動源の特定が可能になり、効果的に振動、騒音を低減させるための構造変更指針を得ることができる。しかし実稼働状態に作用する加振力の測定は、センサーの設置場所を確保できないために困難な場合が多い。よって系に加わる加振力を他の計測データから間接的に算出すること、すなわち入力同定が必要となる。

入力同定法としては、一般に逆行列法が用いられている。逆行列法では加振力と加速度間の周波数応答関数であるアクセランス行列の逆行列と、実稼働時の応答加速度の積で加振力を推定する。しかし逆行列を用いたこの演算を行うと応答加速度やアクセランス行列に含まれる計算誤差が同定した加振力に拡大して伝播してしまう。先行研究において提案された動質量法はアクセランスの逆行列である動質量行列を直接推定することで、逆行列を用いた計算を回避し、同定精度を向上させている。このように入力同定の精度向上が求められ、様々な研究が行われているが、実用上の精度は必ずしも十分ではない。

本研究では従来の加速度応答に加え、ひずみ応答を用いて入力同定を行う手法を提案する。従来の入力同定手法では、固有振動数近傍においてその固有モードが支配的になり、どの点を加振してもほぼ同じ振動形状を示すために、周波数応答関数行列は悪条件になる。この場合にはアクセランス行列の逆行列の計算は誤差の影響を受けやすく、同定される加振力は真値から離れたものになることが多い。共振点においては、少しでも他モードの影響を受けることで、周波数応答関数行列の悪条件が緩和されることが期待できるとされている。先行研究においては、ひずみ応答の周波数応答関数はアクセランスに比べて高

次モードの影響をより大きく受けるため、加速度応答よりも精確な加振力推定が可能であるとされている。しかし明確な根拠は示されていない。

本研究ではひずみ周波数応答関数における高次モードの影響について明らかにし、数値シミュレーション及び車両を模擬した簡易構造物を用いた入力同定実験を行い、入力同定におけるひずみ応答の有効性を検討する。さらに入力同定にひずみ計を用いた場合の有効な設置箇所についても検討を加える。

本論文は全7章から構成されている。

第1章では研究背景として入力同定の概要、および現状の課題について述べ、本研究の目的を明らかにする。

第2章では本研究で用いる理論について述べる。まず入力同定手法である逆行列法、動質量法の理論、および入力同定に必要となる周波数応答関数の推定方法について述べる。次に同定精度の評価に用いる指標、および同定誤差の評価方法について述べる。次に第3章の数値計算及び第4章の数値シミュレーションで用いる片持ちはりにおけるアクセラランスとひずみ周波数応答関数の導出について述べる。

第3章では第2章で算出した片持ちはりにおけるアクセラランスとひずみ周波数応答関数の比較を行う。また片持ちはりの各応答点で高次モードの影響度の算出を行う。その結果、加振点付近におけるひずみ周波数応答関数は高次モードの影響を強く受けていることが確認された。また加振点付近以外ではアクセラランスの方が高次モードの影響がわずかに大きい傾向が見られた。

第4章では数値シミュレーションにより入力同定を行う。加速度応答、ひずみ応答、それぞれを用いて入力同定を行い、それらの入力同定結果を比較する。その結果、ひずみ応答を用いた入力同定の方が同定精度は向上した。さらに同定した加振力と推定した周波数応答関数から評価点の応答を算出する再合成を行った結果、提案法の方が応答の再合成の精度も高いことがわかった。

第5章では簡易構造物を用いた実験を行い、第4章で行った数値シミュレーションによる検討結果が実構造物に対しても成立するかを確認する。実験の結果、実構造物においてもひずみ応答を用いた入力同定は同定精度が高いことがわかった。また入力同定にひずみ応答を用いる場合、加振点付近の応答のみを使用することで、精度の高い入力同定が可能であることも明らかになった。さらに第4章と同様に、応答の再合成においても精度が高いことを示した。

第6章では第5章と同じ実験を行い、ひずみ計の設置個数と設置箇所について検討する。その結果、入力同定に加振点付近のひずみ応答のみを使用した場合、ひずみ計の数を増やすことで、同定精度が向上することが確認された。また加振点付近であってもひずみ量の少ない部位の応答を入力同定に使用した場合、同定精度が低下すること等もわかった。

第7章では本研究で得られた知見を結論としてまとめる。さらに今後の研究課題について述べる。

2014 年度 修士論文

# 動ひずみ測定を用いた振動入力 の同定精度向上に関する研究

首都大学東京大学院 理工学研究科 機械工学専攻

13883305 糸藤 匠

指導教官 吉村 卓也 教授

## 目次

<b>第 1 章 緒言</b>	<b>1</b>
1.1 研究背景-----	2
1.2 先行研究-----	3
1.3 研究目的-----	4
1.4 論文の構成 -----	4
<b>第 2 章 理論</b>	<b>5</b>
2.1 入力同定の理論-----	6
2.1.1 逆行列法(Matrix Inversion Method)-----	6
2.1.2 動質量法(Apparent Mass Method)-----	7
2.2 周波数応答関数の推定方法について-----	7
2.2.1 $H_1$ 推定法(1 点加振) -----	8
2.2.2 $H_1$ 推定法(多点同時加振) -----	10
2.3 動質量の推定方法について-----	12
2.3.1 動質量推定(多点同時加振) -----	12
2.3.2 動質量推定(1 点加振) -----	13
2.4 入力同定の評価方法-----	14
2.4.1 相対誤差(Relative Error)-----	14
2.4.2 周波数平均誤差(Frequency Averaged Error) -----	14
2.5 条件数-----	15
2.6 同定加振力の分散-----	17
2.6.1 同定加振力の分散-----	17
2.6.2 アクセラレンスの推定誤差に起因する分散-----	18
2.6.3 動質量の推定誤差に起因する分散-----	18
2.6.4 周波数応答関数の分散：1 点加振の場合-----	18
2.6.5 実稼働応答の計測誤差に起因する同定加振力の分散-----	19
2.7 信頼係数-----	19
2.8 片持ち梁の曲げ振動-----	20
2.8.1 はりの曲げ振動におけるひずみ-----	20
2.8.2 はりの曲げ振動：波動方程式 -----	21
2.8.3 はりの曲げ振動：固有値と固有振動数の算出-----	22
2.8.4 はりの曲げ振動：変位モード関数の算出-----	25
2.8.5 はりの曲げ振動：応答とひずみモード関数の算出-----	26
2.8.6 はりの曲げ振動：周波数応答関数の算出-----	28

### **第3章 周波数応答関数の比較** **29**

3.1 周波数応答関数の比較の概要-----	30
3.2 解析モデル-----	30
3.3 解析条件-----	30
3.3.1 加振点と応答点の位置-----	30
3.3.2 採用モード数と解析周波数-----	31
3.4 周波数応答関数の比較結果-----	31
3.5 高次モードの影響度による比較-----	32
3.6 第3章のまとめ-----	33

### **第4章 数値シミュレーション** **34**

4.1 数値シミュレーションの概要-----	35
4.2 数値シミュレーションの方法-----	35
4.2.1 シミュレーションのモデル-----	35
4.2.2 シミュレーションの手順-----	36
4.2.3 シミュレーションの条件-----	38
4.3 入力同定：加振点応答を採用した場合-----	39
4.3.1 周波数応答関数推定-----	39
4.3.2 入力同定結果：Case A-----	40
4.3.3 条件数：Case A-----	43
4.3.4 同定加振力の分散と信頼係数：Case A-----	44
4.3.5 入力同定結果：Case B-----	47
4.4 入力同定：加振点応答を採用しない場合-----	50
4.4.1 入力同定結果-----	51
4.4.2 条件数-----	54
4.4.3 同定加振力の分散と信頼係数-----	55
4.5 再合成のシミュレーション-----	58
4.5.1 再合成について-----	58
4.5.2 シミュレーションの条件-----	58
4.5.3 再合成の結果-----	59
4.6 第4章のまとめ-----	61

### **第5章 入力同定実験** **62**

5.1 実験概要-----	63
5.2 実験方法-----	63
5.2.1 実験装置-----	63

5.2.2 実験手順-----	67
5.3 入力同定:加速度応答とひずみ応答の比較(2点加振4点応答の場合)-----	67
5.3.1 周波数応答関数推定-----	68
5.3.2 入力同定結果-----	69
5.3.3 条件数-----	72
5.3.4 同定加振力の分散と信頼係数-----	73
5.4 入力同定:加速度応答とひずみ応答の比較(2点加振2点応答の場合)-----	76
5.4.1 入力同定結果-----	77
5.4.2 同定加振力の分散と信頼係数-----	80
5.5 応答の再合成-----	82
5.5.1 再合成について-----	82
5.5.2 再合成の条件-----	82
5.5.3 再合成の結果-----	83
5.6 伝達経路の見落としした場合の同定誤差の比較-----	85
5.6.1 実験条件-----	85
5.6.2 入力同定結果-----	86
5.7 第5章のまとめ-----	88

## **第6章 ひずみ計の設置個数と設置箇所について 89**

6.1 概要-----	90
6.2 入力同定実験：加振点付近におけるひずみ計の設置個数について-----	90
6.2.1 実験方法-----	90
6.2.2 入力同定結果(F1に着目した場合)-----	92
6.2.3 入力同定結果(F2に着目した場合)-----	94
6.2.4 入力同定結果(各入力を同時に解く場合と個別に解く場合の比較)-----	96
6.3 入力同定実験：加振点付近におけるひずみ計の設置箇所について-----	97
6.3.1 実験方法-----	97
6.3.2 入力同定結果-----	98
6.4 第6章のまとめ-----	100

## **第7章 結言 101**

7.1 結言-----	102
7.2 今後の課題-----	102

## **参考文献 104**

# 第 1 章 緒言



## 1.1 研究背景

機械の稼働状況においては、多くの場合構造物各部へ様々な外力が働き、振動や騒音が生じている。時としてこれらの振動・騒音は機械の利用者や周辺の環境、さらに機械の性能に対して悪影響を及ぼす。特に自動車や建設機械は、運転時にエンジンからの振動や路面の凹凸による振動によって乗員に不快感を与えることから、特に低振動・低騒音が求められている。よって機械構造物の稼働による振動・騒音を低減させるための技術は、商品の付加価値向上のために重要になっている。

現在、振動騒音対策として、動吸振器のように機械構造物に部品を付加することで、振動を低減させるというような研究がされている。実例を挙げると、自動車のステアリングの振動対策として、エアバック部分に付加質量を内蔵することで付加質量が振動を吸収し、ハンドルの振動を低減させるという研究があり、これはすでに実用化も進んでいる<sup>1)</sup>。しかし部品付加によって使用部品数が増加し、重量・コストが増加してしまうという問題点がある。そこで「低重量・低コスト」と「低振動・低騒音化」を両立させるためには構造物の部分変更が有効であると考えられる。

近年、振動・騒音の対策検討では伝達経路解析 (Transfer Path Analysis, 以下 TPA)<sup>2)</sup>が盛んに用いられている。TPA は対象とする系を受動系と駆動系に分離し、各系に作用する入力と入力点と評価点間の周波数応答関数 (Frequency Response Function) の積として応答に占める寄与を評価する手法である。これにより寄与の大きい振動源の特定が可能になり、効果的に振動、騒音を低減させるための構造変更指針を得ることができる。式(1.1)に TPA の式を示す。

$$P(\omega) = \sum_i h_i(\omega) f_i(\omega) \quad (1.1)$$

$P(\omega)$  : ある評価点における音圧[Pa]

$h_i(\omega)$  : 評価点の音圧と加振力の間の周波数応答関数[Pa/N]

$f_i(\omega)$  : 加振力[N]

実稼働状態において、各系に作用する加振力の測定は、精度的な観点からセンサーを用いた直接計測が望ましい。しかしセンサーの設置場所を確保できないことや、センサーの設置により外力条件が変わってしまうなどの理由から、加振力の直接計測が困難な場合が多い。よって系に作用する加振力を他の計測データから間接的に算出すること、すなわち入力同定が必要となる。

入力同定法には逆行列法(Matrix Inversion)、動質量法(Apparent Mass Method)<sup>3)</sup>動バネ法(Mount Stiffness Method)が提案されている。この手法の中で一般に最も用いられているのが逆行列法である。逆行列法では加振力と加速度間の周波数応答関数であるアクセラランス行列の逆行列と、実稼働時の応答加速度の積で加振力を推定する。しかし逆行列を用いたこの演算を行うと応答加速度やアクセラランス行列に含まれる計算誤差が同定した加振力に拡大して伝播するという問題があり、加振力に含まれる誤差は無視できない値となる<sup>4)</sup>。

振動・騒音低減のための構造変更指針をより正確に得るために TPA の精度向上が求められる。そのためには入力同定の精度を向上させることが必要となる。

## 1.2 先行研究

本節では入力同定や TPA に関する先行研究について述べる。

まず入力同定に関する先行研究を述べていく。

動バネ法(式(1.2))は、マウントの剛性値と相対変位から入力を計算する手法であり、実稼働試験において、ブッシュの加速度と動剛性を計測する。しかし、正確なマウント剛性値の計測が困難であり、さらにマウント両端における変位が小さい場合には適用が難しい。

$$F_i = \frac{K_{d_i} (\ddot{X}_{a_i} - \ddot{X}_{s_i})}{-\omega^2} \quad (1.2)$$

$K_{d_i}$ : ブッシュの動剛性

$\ddot{X}_{a_i}$ : 駆動側の加速度

$\ddot{X}_{s_i}$ : 受動側の加速度

動質量法ではアクセラランスの逆行列である動質量行列を加振試験から直接推定する。この手法では入力の計測誤差を低減させるために、加振力の予測誤差を最小二乗法によって最小化して動質量を推定する。さらにこの手法では逆行列を用いた計算を回避しているため、逆行列法よりも精度が向上することが期待される。しかし周波数によっては同定精度が十分ではない場合もある。また動質量法を用いて TPA を行うと、寄与を計算する際に逆演算を行う必要があるため、従来法より精度が低下する場合がある。

入力同定における応答計測点の個数および配置について検討した研究もされている<sup>5)</sup>。この研究では計測した応答点からどのような応答点を選択すれば入力同定精度が低減するかを検証している。さらに系統誤差が入力同定結果に与える影響についても検討している。

統計的エネルギー解析法(Statistical Energy Analysis, SEA)やエネルギー分布(Energy Distribution ED)に代表されるエネルギーモデルを用いて実稼働時の外力を同定する手法<sup>6)</sup>が提案されており、この手法では外力作用位置が明確ではない場合の外力同定が可能である。

このように、入力同定に関する様々な研究が行われているが、実用上の精度は必ずしも十分ではない。

続いて TPA に関する先行研究を述べていく。

TPA に関する先行研究としては実稼働伝達経路解析<sup>1)</sup>(以下実稼働 TPA)がある。実稼働 TPA は加振点付近の参照点での加速度と評価点での応答を使用し、その間の周波数応答関数を求めて寄与を評価する手法である。この手法では実稼働データのみを用いた寄与評価が可能であり、あらかじめ周波数応答関数の推定を行う必要がないため、従来 TPA よりも実験に必要な工数も削減できる。しかし各点に作用する入力が独立でなければならない、伝達経路の見逃しを認識できないというような問題点がある。

### 1.3 研究目的

本研究ではひずみ応答を用いて入力同定を行う手法を検討する。従来の入力同定手法では、固有振動数近傍において、その固有モードが支配的になり、どの点を加振してもほぼ同じ振動形状を示すために、周波数応答関数行列は悪条件になる。この場合にはアクセラランス行列の逆行列の計算は誤差の影響を受けやすく、同定される加振力は真値から離れたものになることが多い。共振点においては、少しでも他モードの影響を受けることで、周波数応答関数行列の悪条件が緩和されることが期待できるとされている。先行研究において、ひずみ応答の周波数応答関数はアクセラランスに比べて高次モードの影響をより大きく受けるため、加速度応答よりも正確な加振力推定が可能であることが報告されている。しかし明確な根拠は示されていない<sup>7),8),9)</sup>。またひずみ応答は測定点が近接した部分においても、その部位で異なった応答を示すので、加速度計よりも正確な荷重の同定が可能と述べている先行研究もある<sup>10)</sup>。このようにひずみを用いた入力同定に関する検討例は報告されているものの、その根拠は十分に明らかにされていない。

本研究ではひずみ応答周波数応答関数における高次モードの影響について明らかにし、数値シミュレーション及び車両を模擬した簡易構造物を用いた入力同定実験を行い、入力同定におけるひずみ応答の有効性を検討する。さらに入力同定にひずみ計を用いた場合の有効な設置箇所についても検討する。

### 1.4 論文の構成

本論文は以下の章から構成されている。

第2章では本研究で用いる理論について述べる。まず入力同定手法である逆行列法、動質量法の理論、および入力同定に必要な周波数応答関数の推定方法について述べる。次に同定精度の評価に用いる指標、および同定誤差の評価方法について述べる。次に第3章の数値計算及び第4章の数値シミュレーションで用いる片持ちはりにおけるアクセラランスとひずみ周波数応答関数の導出について述べる。

第3章では第2章で算出した片持ちはりのアクセラランスとひずみ周波数応答関数を比較を行う。

第4章では、数値シミュレーションを用いた入力同定を行う。加速度応答、ひずみ応答、それぞれを用いて入力同定を行い、それらの入力同定結果を比較する。

第5章では実車両を模擬した簡易構造物を用いた加振実験を行い、加速度応答を用いた入力同定とひずみ応答を用いた入力同定を比較する。

第6章では第5章と同じ実験を行い、入力同定にひずみ計を用いた場合における、ひずみ計の設置個数と設置箇所について検討する。

第7章では、本研究で得られた知見を結論としてまとめ、さらに今後の課題について述べる。

## 第 2 章 理論

## 2.1 入力同定の理論

TPA において加振力を直接計測することは、ロードセルなどの設置スペースや取付け面確保の観点から困難な場合が多く、そのため、間接的に加振力を推定する入力同定を行う必要がある。

入力同定は周波数応答関数の推定、実稼働応答の計測の2つの工程からなる。周波数応答関数の推定では対象とする系を受動系と駆動系に分離し、受動系と駆動系の結合点を加振する。その加振点と各応答点間の周波数応答関数を推定する。実稼働応答の計測では受動系と駆動系を結合し、駆動系を稼働させることで各応答を計測する。以上の工程より計測したデータを用いて入力同定を行う。

本節では入力同定の手法として従来から用いられている逆行列法(Matrix Inversion Method)および、先行研究で提案された動質量法(Apparent Mass Method)の理論を述べる。

### 2.1.1 逆行列法(Matrix Inversion Method)

逆行列法による入力同定では、初めに振動試験で周波数応答関数を推定する。この周波数応答関数は最小二乗法を用いて応答に含まれる誤差が最小になるように推定を行う。そして次に実稼働時における応答を計測する。このときの応答計測点は、先に行なわれた周波数応答関数推定時の応答計測点と同じである。得られた周波数応答関数、実稼働時の応答と境界上に作用する加振力の間にはある周波数  $\omega$  において以下の関係が成り立つ。ここで  $m$  は加振点数、 $n$  は応答計測点数である。

$$\begin{Bmatrix} y_1(\omega) \\ \vdots \\ y_n(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1,1}(\omega) & \cdots & H_{1,m}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n,1}(\omega) & \cdots & H_{n,m}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1(\omega) \\ \vdots \\ f_m(\omega) \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} f_j(\omega) : \text{点 } j \text{ における加振力のフーリエスペクトル[N]} \\ y_i(\omega) : \text{点 } i \text{ における応答のフーリエスペクトル} \\ H_{i,j}(\omega) : \text{点 } j \text{ 入力, 点 } i \text{ 応答の周波数応答関数} \end{cases}$$

この式を以下のように行列表記する。

$$\mathbf{y}(\omega) = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{f}(\omega) \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \mathbf{f}(\omega) : \text{加振力のフーリエスペクトルからなる列ベクトル} \\ \mathbf{y}(\omega) : \text{応答のフーリエスペクトルからなる列ベクトル} \\ \mathbf{H}(\omega) : \text{周波数応答関数からなる行列} \end{cases}$$

加振点数  $m$  と応答計測点数  $n$  が等しい場合( $m=n$ )には次式のように  $\mathbf{H}$  の逆行列を計算し、式の両辺に左からかけることで入力同定を行う。

$$\mathbf{f}(\omega) = \mathbf{H}^{-1}(\omega) \mathbf{y}(\omega) \quad (2.3)$$

入力同定精度の観点から、応答計測点数を加振点数よりも多く取ることが一般的であり

( $m < n$ )、加振点数  $m$  と応答計測点数  $n$  が異なるときは最小二乗法を用いて入力同定を行う。この場合には次式のように入力同定を行う。

$$\mathbf{f}(\omega) = \mathbf{H}^+(\omega) \mathbf{y}(\omega) \quad (2.4)$$

$$\left\{ \mathbf{H}^+(\omega) : \text{疑似逆行列} [\mathbf{H}^+(\omega) = (\mathbf{H}^H(\omega) \mathbf{H}(\omega))^{-1} \mathbf{H}^H(\omega)] \right.$$

ここで  $\mathbf{H}^H(\omega)$  は  $\mathbf{H}(\omega)$  の共役複素転置である。よって式(2.3)、式(2.4)を用いて周波数応答関数と実稼働時の応答から実稼働時の加振力を同定する。

### 2.1.2 動質量法(Apparent Mass Method)

動質量法は、アクセランス行列の逆行列、または擬似逆行列に当たる動質量行列を直接推定して用いる手法である。動質量法による入力同定では始めに加振実験により動質量を推定する。そして次に実稼働時における応答を計測する。得られた動質量、実稼働時の応答と境界上に作用する加振力の間には、ある周波数  $\omega$  において以下の関係が成り立つ。

$$\mathbf{f}(\omega) = \mathbf{G}(\omega) \mathbf{y}(\omega) \quad (2.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}(\omega) : \text{加振力のフーリエスペクトルの列ベクトル} \\ \mathbf{y}(\omega) : \text{応答のフーリエスペクトルの列ベクトル} \\ \mathbf{G}(\omega) : \text{動質量行列} \end{array} \right.$$

動質量法は、逆行列を用いた計算を避けることにより同定精度を向上させている。また、動質量法は入力加振力の誤差が最小となるよう推定するため、入力同定に有利であるとされている。式(2.5)を用いて動質量と実稼働時の応答から実稼働時の加振力を同定する。

## 2.2 周波数応答関数の推定方法について

この節では入力同定時に用いられる周波数応答関数の理論について述べていく。

入力のフーリエスペクトルを  $\mathbf{x}(\omega)$ 、応答のフーリエスペクトルを  $\mathbf{y}(\omega)$  とし、周波数応答関数を  $\mathbf{h}(\omega)$  とする。ある周波数において、入力と応答の間には以下が成り立つ。

$$\mathbf{y}(\omega) = \mathbf{h}(\omega) \mathbf{x}(\omega) \quad (2.6)$$

ここで  $\mathbf{x}(\omega)$  と  $\mathbf{y}(\omega)$  は  $1 \sim N$  回目の計測値が並ぶ  $N$  次元ベクトルである。仮に計測誤差が全くなく、対象物が線形であれば、1回の計測で周波数応答関数を得ることができる。しかし実際は計測誤差や非線形性などの影響により、複数回の計測を行い、複数の入力加振力と出力応答の組み合わせで周波数応答関数を推定する必要がある。この周波数応答関数の推定には、一般的に  $\mathbf{H}_1$  推定法を用いて行う。 $\mathbf{H}_1$  推定法は応答にのみ誤差が含まれると仮定して、その混入誤差を最小化するように最小二乗法で周波数応答関数を推定するものである。

### 2.2.1 $H_1$ 推定法(1点加振)

本項では1点加振の場合の  $H_1$  推定について述べる.  $N$  回の計測で入力加振力と応答を得たとする. 応答にのみ計測誤差が含まれるものとする, 以下の式が成り立つ.

$$\begin{Bmatrix} y^{(1)}(\omega) - a^{(1)}(\omega) \\ \vdots \\ y^{(N)}(\omega) - a^{(N)}(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(1)}(\omega) \\ \vdots \\ x^{(N)}(\omega) \end{bmatrix} h(\omega) \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} x^{(k)}(\omega) : \text{入力加振力のフーリエスペクトル} \\ y^{(k)}(\omega) : \text{出力応答のフーリエスペクトル} \\ a^{(k)}(\omega) : \text{出力応答に含まれる誤差のフーリエスペクトル} \end{cases}$$

$x^{(k)}(\omega)$ ,  $y^{(k)}(\omega)$ ,  $a^{(k)}(\omega)$  はそれぞれ, 第  $k$  回目の計測で得られた次の量を意味する.

ここで, 出力応答に含まれる誤差の二乗和

$$\mu = \sum_{k=1}^N |a^{(k)}(\omega)|^2$$

が誤差スペクトル  $a(\omega)$  の長さが最小になるように直線の傾き  $h$  を決定するのが  $H_1$  推定である. これを表したのが図 2.1 である.

ここで式(2.7)をベクトル表記すると

$$\mathbf{y} - \mathbf{a} = \mathbf{x}h \quad (2.8)$$

最小二乗法により誤差  $\mu$

$$\mu = \|\mathbf{a}\|^2 \quad (2.9)$$

が最小になるような係数  $h$  を決定する. これを  $N$  次元空間で模擬したのが図 2.2 である.

ここで, 誤差ベクトル  $\mathbf{a}(\omega)$  は入力ベクトル  $\mathbf{x}(\omega)$  の定数倍  $h(\omega)\mathbf{x}(\omega)$  から出力ベクトル  $\mathbf{y}(\omega)$

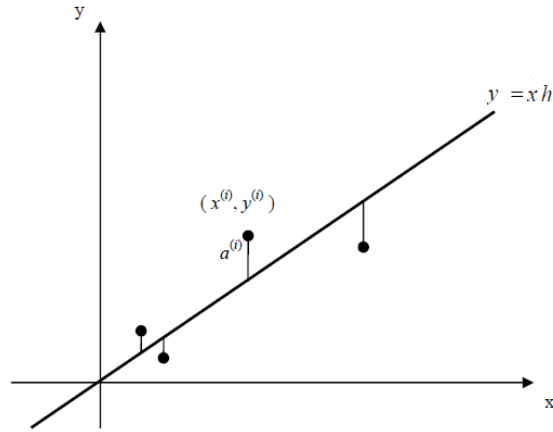
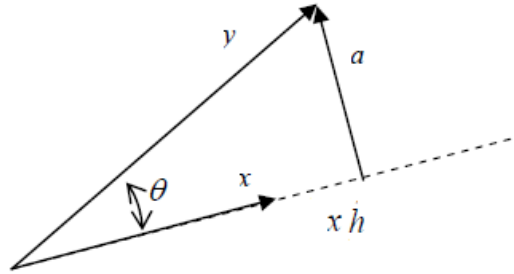
へと向かうベクトルであるので,  $\|\mathbf{a}\|^2$  を最小にするには  $h(\omega)\mathbf{x}(\omega)$  がベクトル  $\mathbf{y}(\omega)$  から直線

$x(\omega)$  へおろした垂線の足となるようにすればよい. これをベクトルの直交条件で示せば,

$$\mathbf{x}^H (\mathbf{y} - \mathbf{x}h) = 0 \quad (2.10)$$

となり, ここから次式が得られる

$$h = \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{y}}{\mathbf{x}^H \mathbf{x}} \quad (2.11)$$

図 2.1  $H_1$  推定における観測データと直線  $y=xh$  の関係図 2.2  $N$  次元空間における入力ベクトル  $\mathbf{x}$  と応答ベクトル  $\mathbf{y}$  の関係

ここで計測データの信頼性の指標となるコヒーレンス関数について述べる.

線形系では入力ベクトル  $\mathbf{x}$  と出力ベクトル  $\mathbf{y}$  は本来線形関係になり幾何学的には同一直線上に存在するものである. しかし実際には測定誤差によりこの関係は成り立っていない. そこで, 入力ベクトル  $\mathbf{x}$  と出力ベクトル  $\mathbf{y}$  の線形性の尺度を表すものとして,  $N$  次元空間における 2 つのベクトルの余弦を考えると以下の関係が成り立つ.

$$\mathbf{x}^H \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \quad (2.12)$$

この余弦関数を利用して以下のようにコヒーレンス関数  $\gamma^2$  が定義される.

$$\gamma^2 = |\cos \theta|^2 = \frac{|\mathbf{x}^H \mathbf{y}|^2}{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2} \quad (2.13)$$

すなわちコヒーレンス関数  $\gamma^2$  については

$$0 \leq \gamma^2 \leq 1 \quad (2.14)$$

である. よってコヒーレンス関数の値が 1 に近ければ計測データの線形性が高く, 計測データの信頼性が高いといえる.



### 2.2.2 $H_1$ 推定法(多点同時加振)

本項では多点同時加振の場合の  $H_1$  推定について述べる．加振点数を  $m$ ，計測回数を  $N(\geq m)$  とし，出力応答にのみ誤差が含まれると仮定すると，ある周波数において次式が成り立つ．

$$\begin{cases} y^{(1)}(\omega) - a^{(1)}(\omega) \\ \vdots \\ y^{(N)}(\omega) - a^{(N)}(\omega) \end{cases} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(\omega), \dots, x_j^{(1)}(\omega) \\ \vdots \\ x_1^{(N)}(\omega), \dots, x_j^{(N)}(\omega) \end{bmatrix} \begin{cases} h_1(\omega) \\ \vdots \\ h_j(\omega) \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} x_j^{(k)}(\omega) : \text{点 } j \text{ の入力加振力のフーリエスペクトル} \\ y^{(k)}(\omega) : \text{応答出力のフーリエスペクトル} \\ a^{(k)}(\omega) : \text{応答出力に含まれる誤差のフーリエスペクトル} \\ h_j(\omega) : \text{点 } j \text{ の入力による周波数応答関数} \end{cases}$$

ここで  $x_j^{(k)}(\omega), y^{(k)}(\omega)$  はそれぞれ，第  $k$  回目の計測で得られた値を意味する．

ここで，測定回数  $N$  が加振点数  $m$  に等しければ，式(2.15)は連立方程式となり  $h_j(\omega)$  を求めることができるが，一般には測定回数  $N$  を加振点数  $m$  よりも多くとることができるため，出力信号に含まれる誤差の二乗和

$$\mu = \sum_{k=1}^N |a^{(k)}(\omega)|^2 \quad (2.16)$$

が最小になるような  $h_j(\omega)$  を最小二乗法により求める．式(2.16)を次式のように行列表記する．

$$\mathbf{y} - \mathbf{a} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m] \mathbf{h} = \mathbf{X} \mathbf{h} \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} \mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m] = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(\omega), \dots, x_m^{(1)}(\omega) \\ \vdots \\ x_1^{(N)}(\omega), \dots, x_m^{(N)}(\omega) \end{bmatrix} \\ \mathbf{h} = \begin{cases} h_1(\omega) \\ \vdots \\ h_m(\omega) \end{cases} \end{cases}$$

この関係を加振点数  $m$  が 2 のときに  $N$  次元空間で模擬して示したのが図 2.3 である．誤差ベクトル  $\mathbf{a}$  のノルムが最小となるようにするには，ベクトル  $\mathbf{y}$  からベクトル  $\mathbf{x}_1$  と  $\mathbf{x}_2$  の任意の線形結合でつくられる平面  $\mathbf{R}(\mathbf{X})$  (行列  $\mathbf{X}$  の列空間) に下した垂線の足は  $\mathbf{X} \mathbf{h}$  となるように  $\mathbf{h}$  を定めればよい．このとき，誤差ベクトル  $\mathbf{a}$  と行列  $\mathbf{X}$  の列空間とは直交するので，

$$\mathbf{X}^H (\mathbf{y} - \mathbf{X} \mathbf{h}) = 0 \quad (2.18)$$

したがって、誤差  $\mu$  を最小にする周波数応答関数ベクトル  $\mathbf{h}$  は次式により得られる。

$$\mathbf{h} = (\mathbf{X}^H \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^H \mathbf{y} \quad (2.19)$$

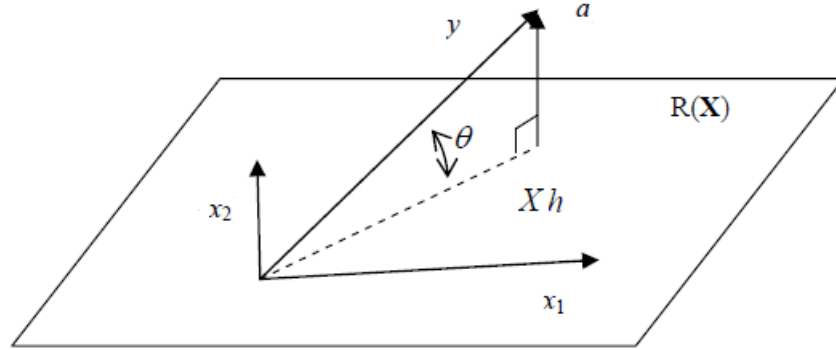


図 2.3 多点加振での  $N$  次元空間における入力ベクトル  $\mathbf{x}$  と応答ベクトル  $\mathbf{y}$  の関係

ここで多点加振の場合のコヒーレンス関数について述べる。線形系では本来、出力ベクトル  $\mathbf{y}$  は、入力ベクトル  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  の線形結合で表されるため、ベクトル  $\mathbf{y}$  は行列  $\mathbf{X}$  の列空間  $\mathbf{R}(\mathbf{X})$  に属するはずである。しかし一般的には計測誤差のため、ベクトル  $\mathbf{y}$  は列空間  $\mathbf{R}(\mathbf{X})$  から離れたところに存在する。

そこで第2章2節1項で述べた1点加振の場合に対応して、計測データの線形性の尺度を示すものとして、出力ベクトル  $\mathbf{y}$  と入力ベクトルの列空間  $\mathbf{R}(\mathbf{X})$  のなす角の余弦の絶対値の2乗を用いれば、図 2.3 における幾何学な関係から

$$\gamma_{multi}^2 = |\cos \theta|^2 = \frac{|\mathbf{X}\mathbf{h}|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} \quad (2.20)$$

が得られる。この  $\gamma_{multi}^2$  が多点加振の場合に定義される多重関連度関数(マルチコヒーレンス)である。

### 2.3 動質量の推定方法について

この節では加振実験によって得られた入力加振力のフーリエスペクトルと出力応答のフーリエスペクトルを用いて、 $H_2$ 推定法により動質量を推定する方法について述べる。 $H_2$ 推定法は入力にのみ誤差が含まれると仮定して、その混入誤差を最小化するように最小二乗法で周波数応答関数を推定するものである。

#### 2.3.1 動質量推定(多点同時加振)

本項では多点同時加振の場合の動質量推定について述べる。次式で表される動質量行列について考える。

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{y} \quad (2.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G} : \text{動質量行列 } (m \times n) \\ \mathbf{y} : \text{応答加速度のフーリエスペクトル } (n \times 1) \\ \mathbf{x} : \text{加振力のフーリエスペクトル } (m \times 1) \end{array} \right.$$

ここで、多点同時加振が行われたときの、多点計測された応答加速度と入力点  $i$  との動質量に着目する。加振力にのみ誤差が含まれると仮定すると次式が成り立つ。

$$\left\{ \begin{array}{c} x^{(1)} - \varepsilon^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(N)} - \varepsilon^{(N)} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{c} [y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}] \\ \vdots \\ [y_1^{(N)}, \dots, y_n^{(N)}] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{array} \right\} \quad (2.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{(k)} : \text{点 } i \text{ における入力加振力のフーリエスペクトル} \\ y_j^{(k)} : \text{点 } j \text{ における応答加速度のフーリエスペクトル} \\ \varepsilon^{(k)} : \text{応答加速度に含まれる誤差のフーリエスペクトル} \\ g_j : \text{点 } j \text{ の加速度と点 } i \text{ の加振力との動質量} \end{array} \right.$$

なお、 $x^{(k)}$ ,  $y_j^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  はそれぞれ第  $k$  回目の計測で得られる量である。

式(2.22)を次式のように行列表記する。

$$\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Y}\mathbf{g}_i \quad (2.23)$$

$\mathbf{g}_i$  は動質量行列の  $i$  行目を縦に並べた列ベクトルである。

入力加振力に含まれる誤差の二乗和が最小になるような  $\mathbf{g}_i$  を最小二乗法により求める。誤差ベクトル  $\boldsymbol{\varepsilon}$  と  $\mathbf{Y}$  の列空間が直交するという条件より、

$$\mathbf{Y}^H (\mathbf{x}_i - \mathbf{Y}\mathbf{g}_i) = 0 \quad (2.24)$$

式(2.24)より動質量ベクトル  $\mathbf{g}_i$  は次のように得られる。

$$\mathbf{g}_i = (\mathbf{Y}^H \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^H \mathbf{x}_i \quad (2.25)$$

$\mathbf{g}_i$  は式(2.21)における動質量行列の行ベクトルであるので、式(2.25)の両辺の転置をとって、

$$\mathbf{g}_i^T = \mathbf{x}_i^T \mathbf{Y}^* \left( (\mathbf{Y}^H \mathbf{Y})^{-1} \right)^T = \mathbf{x}_i^T \mathbf{Y}^* (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}^*)^{-1} \quad (2.26)$$

全ての加振点における動質量行列を作成すると、式(2.26)は次式のように行列表記できる。

$$\mathbf{G} = \mathbf{X}^T \mathbf{Y}^* (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}^*)^{-1} \quad (2.27)$$

$\mathbf{X}$  は加振力のフーリエスペクトル行列 ( $N \times m$ ) である。

式(2.27)はスペクトル行列を用いて書き換えると次式になる。

$$\mathbf{G} = \mathbf{W}_{\mathbf{XY}}^* (\mathbf{W}_{\mathbf{YY}}^{-1})^* \quad (2.28)$$

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{\mathbf{XY}} : \text{入力加振力と応答加速度のクロススペクトル行列 } \mathbf{W}_{\mathbf{XY}} = \mathbf{X}^H \mathbf{Y} \\ \mathbf{W}_{\mathbf{YY}} : \text{応答加速度のパワースペクトル行列 } \mathbf{W}_{\mathbf{YY}} = \mathbf{Y}^H \mathbf{Y} \end{cases}$$

式(2.28)を用いて動質量の推定を行なう。

### 2.3.2 動質量推定 (1点加振)

本項では複数点ある加振点を1点ずつ加振して動質量行列を推定する場合について述べる。動質量は加速度が入力、加振力が応答である。よって1点ずつ加振する場合でも全加振点を加振したときの応答を知る必要がある。そのため全点を加振したときの応答を全て計測しおき、最後に全データを平均して動質量行列を推定する。

複数の加振点を1点ずつ加振した場合には、式(2.27)は次式になる。

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(N)} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & x_2^{(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{(N)} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_m^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_m^{(N)} \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_m \end{bmatrix} \right]^* \left( \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_m \end{bmatrix} \right]^T \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_m \end{bmatrix} \right]^* \right)^{-1} \quad (2.29)$$

$$\begin{cases} x_i^{(k)} : \text{点 } i \text{ を加振した時の第 } k \text{ 回目の計測における加振力のフーリエスペクトル} \\ \mathbf{Y}_i : \text{点 } i \text{ を加振した時の応答加速度のフーリエスペクトル行列 } (N \times n) \end{cases}$$

## 2.4 入力同定の評価方法

第4章, 第5章では相対誤差および周波数平均誤差を用いて入力同定精度の評価を行う。本節では各応答・各手法を用いて同定される加振力と, 加振力の真値を比較するための誤差指標値である相対誤差および周波数平均誤差について述べる。

### 2.4.1 相対誤差(Relative Error)

相対誤差は同定される加振力の, 加振力の真値に対する誤差であり, 周波数毎に入力同定誤差を評価するものである。

ある周波数  $\omega$  における加振力の相対誤差  $\varepsilon_{rel.}(\omega)$  は次式で表せる。

$$\varepsilon_{rel.}(\omega) = \frac{\sum_{k=1}^N |\hat{f}^{(k)}(\omega) - f^{(k)}(\omega)|^2}{\sum_{k=1}^N |f^{(k)}(\omega)|^2} \quad (2.30)$$

{

$\hat{f}^{(k)}(\omega)$  :  $k$  回目に同定された加振力のフーリエスペクトル  
 $f^{(k)}(\omega)$  :  $k$  回目の加振力の真値のフーリエスペクトル  
 $N$  : 入力同定の平均回数

### 2.4.2 周波数平均誤差(Frequency Averaged Error)

周波数平均誤差は全周波数における同定誤差の加算平均より得られる誤差指標値である。周波数平均誤差は, 各周波数における同定誤差を周波数ライン上で加算平均するため, 各手法につき単一の誤差指標値を得ることができる。

加振力の周波数平均誤差  $\varepsilon_{ave.}(\omega)$  は次式で表され, 前項で述べた相対誤差を用いて算出する。

$$\varepsilon_{ave.}(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{u=1}^M \varepsilon_{rel.}(\omega_u) \quad (2.31)$$

{

$M$  : 周波数点数

## 2.5 条件数<sup>4)</sup>

本節では逆行列法における誤差伝播と、入力同定に使用される周波数応答関数の条件数の関係を述べる。

加振力  $f$ 、応答  $y$ 、周波数応答関数  $H$  の間の関係は以下のように示せる。

$$y = Hf \quad (2.32)$$

この式において未知数を  $f$  としたときの解は最小二乗法によって求められる。このときベクトル  $y$  や行列  $H$  が含んでいる誤差が拡大し、結果である  $f$  の値に誤差が伝播する。 $y$  の変化によって解である  $f$  が変化する率が条件数  $\kappa$  である。条件数は線形方程式を解く際に丸め誤差が解の誤差として拡大される程度を表す。ここで  $H$  の条件数  $\kappa$  は最大特異値  $\mu_{\max}$  と最小特異値  $\mu_{\min}$  を用いると以下のように表せる。

$$\kappa(H) = \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}} \quad (2.33)$$

ここで  $H$  の最大特異値はスペクトルノルムを用いて以下のように表せる。

$$\mu_{\max} = \|H\|_2 \quad (2.34)$$

また  $H$  の最小特異値の逆数は疑似逆行列  $H^+$  の最大特異値に等しいので以下のように表せる。

$$\frac{1}{\mu_{\min}} = \|H^+\|_2 \quad (2.35)$$

よって式(2.34)、式(2.35)を用いて、式(2.33)は以下のように表せる。

$$\kappa(H) = \|H\| \|H^+\| \quad (2.36)$$

ここで「応答加速度  $y$  の誤差  $dy$  から同定加振力  $f$  への誤差伝播」と「周波数応答関数行列  $H$  の誤差  $dH$  から同定加振力  $f$  への誤差伝播」について考える。

(1) 応答加速度  $y$  の誤差  $dy$  から同定加振力  $f$  への誤差伝播

加振力に含まれる誤差を  $df$  とすると以下のように表せる。

$$y + dy = H(f + df) \quad (2.37)$$

ここで式(2.32)を代入すると

$$\begin{aligned} Hf + dy &= H(f + df) \\ dy &= Hdf \Leftrightarrow H^+ dy = df \end{aligned} \quad (2.38)$$

式(2.38)両辺のそれぞれの大きさをノルムで評価する。

$$\begin{aligned} \|H^+ \|dy\| \geq \|df\| &\Leftrightarrow \|H\| \|df\| \leq \|H\| \|H^+ \|dy\| \\ &\Leftrightarrow \|H\| \leq \|H\| \|H^+ \| \frac{\|dy\|}{\|df\|} \end{aligned} \quad (2.39)$$

また式(2.32)より

$$\|y\| \leq \|H\| \|f\| \Leftrightarrow \frac{\|y\|}{\|f\|} \leq \|H\| \quad (2.40)$$

式(2.39)と式(2.40)より

$$\frac{\|y\|}{\|f\|} \leq \|H\| \|H^+ \| \frac{\|dy\|}{\|df\|} \Leftrightarrow \frac{\|df\|}{\|f\|} \leq \|H\| \|H^+ \| \frac{\|dy\|}{\|y\|} \Leftrightarrow \frac{\|df\|}{\|f\|} \leq \kappa(H) \frac{\|dy\|}{\|y\|} \quad (2.41)$$

式(2.41)より同定加振力  $f$  の相対誤差は、応答  $y$  の相対誤差と周波数応答関数行列の条件数を用いることで評価が可能である。よって周波数応答関数の条件数が小さければ伝播する誤差が少ないということである。

(2)周波数応答関数行列  $H$  の誤差  $dH$  から同定加振力  $f$  への誤差伝播

周波数応答関数  $H$  に含まれる誤差を  $dH$  とすると、次のような関係が得られる。

$$y = [H + dH](f + df) \quad (2.42)$$

式(2.42)より

$$[H + dH]^+ y = f + df \Leftrightarrow [H + dH]^+ y = H^+ y + df \quad (2.43)$$

よって

$$\begin{aligned} df &= [[H + dH]^+ - H^+] y = [H^+ [H - [H + dH]] [H + dH]^+] y \\ &= -[H^+ dH [H + dH]^+] y = -H^+ dH [f + df] \end{aligned} \quad (2.44)$$

式(2.44)の両辺の大きさをノルムで評価すると

$$\|df\| \leq \|H^+ \| \|dH\| \|f + df\| \quad (2.45)$$

よって式(2.45)より

$$\frac{\|df\|}{\|f + df\|} \leq \|H^+ \| \|dH\| = \|H\| \|H^+ \| \frac{\|dH\|}{\|H\|} = \kappa(H) \frac{\|dH\|}{\|H\|} \quad (2.46)$$

式(2.46)より周波数応答関数行列の誤差の影響も条件数に比例することがわかる。よって推定された周波数応答関数行列の条件数を用いて同定加振力の誤差伝播を評価することが可能である。しかし条件数には以下に示す問題点<sup>12)</sup>がある。

- 条件数は誤差伝播を表す指標であり、計測誤差そのものを評価しないため、条件数だけでは同定誤差の評価が困難である。
- 動質量法では動質量行列が長方形列となる場合には条件数と誤差伝播の関係が成り立たない。

次節ではこれら問題点を解消するために提案された手法を述べていく。

## 2.6 同定加振力の分散<sup>3), 11), 12)</sup>

入力同定には周波数応答関数計測と実稼働計測という工程がある。これらの計測において、計測されるデータへの誤差混入は避けられない。同定精度を低下させる要因にはセンサケーブルへのノイズ混入や加振方向、加振位置さらに加振力の変動等に起因する誤差である偶然誤差が挙げられる。2・5節で述べた条件数は誤差伝播を表す指標であり、計測誤差そのものを評価しないため、条件数だけでは、同定誤差の評価が困難である。そこで偶然誤差に起因する同定加振力の分散を推定することで、入力同定における誤差伝播を評価する手法が提案された。

分散を用いて同定誤差の評価が可能な理由を以下に述べる。同定加振力の標本分散は、入力同定の平均回数分得られる加振力と、それらの平均値の差の二乗平均で求められる。加振力の平均値が真値であるとすれば、分散は同定加振力と真値の差の二乗平均、つまり同定誤差となる。よって分散を用いて同定誤差の評価が可能である。

本節では先行研究で提案された同定加振力の分散推定法について述べる。同定加振力の分散を求めるには周波数応答関数計測を繰り返し行う必要があるが、先行研究で提案された手法では同定加振力の分散は通常の入力同定に必要な計測データのみで推定可能である。

なお以下に示す同定加振力の分散推定の各式は参考文献<sup>3), 11), 12)</sup>に詳細が述べられている。

### 2.6.1 同定加振力の分散

同定加振力の分散は以下の式で求められる。

$$\sigma_{f_i}^2 = \sigma_{f_i(FRF)}^2 + \sigma_{f_i(a)}^2 \quad (2.47)$$

$$\begin{cases} \sigma_{f_i(h)}^2 : \text{周波数応答関数の推定誤差に起因する分散} \\ \sigma_{f_i(a)}^2 : \text{実稼働応答の計測誤差に起因する分散} \end{cases}$$

このように同定加振力の分散は「周波数応答関数の推定誤差に起因する分散」と「実稼働応答の計測誤差に起因する分散」の和となる。以下に「周波数応答関数の推定誤差に起因する分散」と「実稼働応答の計測誤差に起因する分散」の算出を示す。



### 2.6.2 アクセランスの推定誤差に起因する分散

アクセランスの推定誤差に起因する分散は以下の式で求められる。

$$\sigma_{f_i(h)}^2 = \sum_{l=1}^n G_{i,l}^* \left( \sum_{k=1}^m A_{k,k} G_{i,l} \sigma_{H(l,k)}^2 \right) \quad (2.48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{i,l} : \text{周波数応答関数の逆行列 } \mathbf{H}^{-1} \text{ の } (i,l) \text{ 成分} \\ A_{k,k} : \text{行列 } \mathbf{A} = \mathbf{Ga}(\mathbf{Ga})^H \text{ の } (k,k) \text{ 成分 (} \mathbf{G} : \text{周波数応答関数行列の逆行列, } \mathbf{a} : \text{実稼働応答)} \\ \sigma_{H(l,k)}^2 : k \text{ 入力 } l \text{ 応答の周波数応答関数の分散} \end{array} \right.$$

アクセランスの分散は以下の式で求められる。  $\mathbf{C}_h$  はアクセランスの分散共分散であり、  $\mathbf{C}_h$  の  $(l,k)$  成分が  $\sigma_{H(l,k)}^2$  である。

$$\mathbf{C}_h = \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{N-m} (1 - \gamma_{multi}^2) (\mathbf{X}^H \mathbf{X})^{-1} \quad (2.49)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X} : \text{加振力のフーリエスペクトル (} N \times m \text{)} \\ \mathbf{y} : \text{加速度のフーリエスペクトル (} N \times 1 \text{)} \\ \gamma_{multi}^2 : \text{マルチコヒーレンス} \end{array} \right.$$

### 2.6.3 動質量の推定誤差に起因する分散

動質量の推定誤差に起因する分散は以下の式で求められる。

$$\sigma_{f_i(g)}^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{C}_{g_i} \mathbf{a}^* \quad (2.50)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} : \text{実稼働加速度 (} n \times 1 \text{)} \\ \mathbf{C}_{g_i} : \text{動質量の分散共分散行列 (} n \times n \text{)} \end{array} \right.$$

動質量の分散共分散行列は以下の式で求められる。

$$\mathbf{C}_{g_i} = \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{N-n} (1 - \gamma_{multi}^2) (\mathbf{Y}^H \mathbf{Y})^{-1} \quad (2.51)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} : \text{加振力のフーリエスペクトル (} N \times 1 \text{)} \\ \mathbf{Y} : \text{加速度のフーリエスペクトル (} N \times n \text{)} \\ \gamma_{multi}^2 : \text{マルチコヒーレンス} \end{array} \right.$$

ただし、ここでのコヒーレンスは入力を加速度、出力を加振力として求める。

### 2.6.4 周波数応答関数の分散：1点加振の場合

これまで多点入力1点応答の周波数応答関数(アクセランス、動質量)の分散推定方法を示した。ここでは1点加振の周波数応答関数の分散について述べる。1点加振の周波数応答関数の分散は以下の式で得られる。

$$\sigma_h = \frac{1}{N-1} |h| \frac{(1-\gamma^2)}{\gamma^2} \quad (2.52)$$

$$\begin{cases} h: \text{周波数応答関数} \\ \gamma^2: \text{コヒーレンス} \end{cases}$$

### 2.6.5 実稼働応答の計測誤差に起因する同定加振力の分散

実稼働応答の計測誤差に起因する同定加振力の分散は次式で求める。

$$\sigma_{f_i(a)}^2 = \mathbf{g}_i^T \mathbf{C}_a \mathbf{g}_i^* \quad (2.53)$$

$\begin{cases} \mathbf{g}_i: \text{動質量 } \mathbf{G} \text{ もしくはアクセランスの逆行列 } \mathbf{H}^{-1} \text{ の } i \text{ 行目を縦に並べたベクトル } (n \times 1) \\ \mathbf{C}_a: \text{実稼働加速度の誤差の分散共分散行列} \end{cases}$

実稼働応答の誤差の分散共分散行列  $\mathbf{C}_a$  は主成分分析を用いて以下のように求める。まず実稼働応答のスペクトル行列  $\mathbf{W}_{aa}$  を次式によって得る。

$$\mathbf{W}_{aa} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{a}^{(k)*} \mathbf{a}^{(k)T} \quad (2.54)$$

$\begin{cases} \mathbf{a}^{(k)}: \text{計測 } N \text{ 回中の } k \text{ 回目に計測された実稼働加速度 } (n \times 1) \end{cases}$

次に  $\mathbf{W}_{aa}$  を固有値分解する。

$$\mathbf{W}_{aa} = \lambda_1 \{\phi_1\} \{\phi_1\}^H + \cdots + \lambda_n \{\phi_n\} \{\phi_n\}^H \quad (2.55)$$

$$(\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n)$$

ここで上式の右辺第一項はスペクトル行列の第一成分を表す。第  $l-1$  主成分までが有意な振動成分であり第  $l$  主成分以降が計測誤差であると仮定することで、誤差の分散共分散行列を次式で推定する。

$$\mathbf{C}_a = \sum_{k=l}^n \lambda_k \{\phi_k\} \{\phi_k\}^H \quad (2.56)$$

有意な振動成分の数  $l-1$  は、系に作用する独立な入力点数を表す。

## 2.7 信頼係数<sup>11),12)</sup>

同定加振力の分散は誤差伝播の評価指標値として用いることができるが、周波数応答関数推定におけるコヒーレンスのように 0~1 の範囲で同定結果の信頼性を評価できることが望ましい。そこで先行研究にて提案された信頼係数を算出する。この信頼係数は以下の式で求めることができ、1 に近いほど信頼性が高く、誤差伝播が小さいことを示す。

$$\gamma_r^2 = \frac{|f|^2}{\sigma_f^2 + |f|^2} \quad (2.57)$$

## 2.8 片持ち梁の曲げ振動<sup>13),14),15),16)</sup>

本節では第3章の数値計算，第4章の数値シミュレーションの解析モデルである片持ちはりの固有値，モード関数，周波数応答関数を求めていく．片持ちはりを図2.4に示す．なを，このはりにはベルヌーイ・オイラーの仮定を持つものとする．本節でははじめにはりの曲げ振動におけるひずみについて求める．そして次に波動方程式から固有値，変位モード関数，ひずみモード関数を求める．そして最後に片持ちはりにおける加速度周波数応答関数(アクセラランス)とひずみ周波数応答関数を求める．

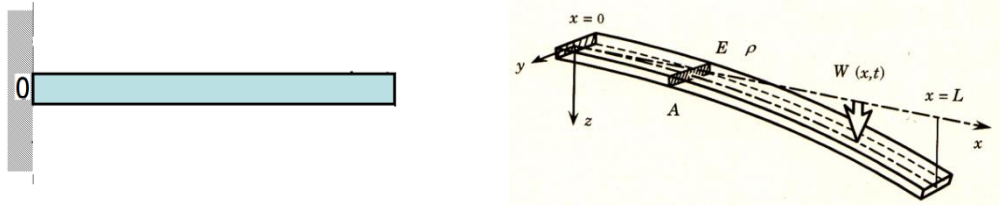


図 2.4 片持ちはり

### 2.8.1 はりの曲げ振動におけるひずみ

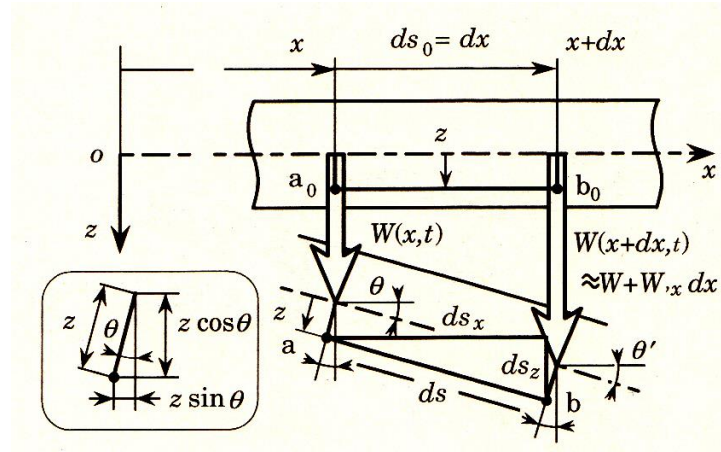


図 2.5 はり微小曲げによる軸ひずみ

本項では，はりの曲げ振動におけるひずみを求めていく．まずたわみに伴う軸方向ひずみを求める．図2.5に示すように，位置  $x$  におけるはり中立軸のたわみ  $W(x,y)$  は，位置  $x+dx$  では  $W(x+dx)=W+W_x dx$  となる．変形前の中立軸から  $z$  の距離における点を  $a_0$  とし，軸心に平行で距離  $dx$  離れた点を  $b_0$  とする．二点間の距離  $ds_0$  は  $ds_0=dx$  となる．たわみ  $W$  が軸方向に変形するので，はり断面は中立軸まわりに角度  $\theta$  傾き， $x+dx$  では  $\theta'$  となる．はりが変形した後，点  $a_0$  と点  $b_0$  はそれぞれ点  $a$  と点  $b$  に移る．変形後の点  $a$  の  $x$  と  $z$  の座標値はそれぞれ  $x-z\sin\theta$  と  $W+z\cos\theta$  となる．点  $b$  においてもそれぞれ  $x+dx-z\sin\theta'$  と  $W+W_x dx+z\cos\theta'$  となる．これより，点  $a$  から点  $b$  までの距離  $ds$  の  $x$  方向成分  $ds_x$  と  $z$  方向成分  $ds_z$  は次のようになる．

$$\begin{aligned} ds_x &= dx - z(\sin\theta' - \sin\theta) \\ ds_z &= W_x dx + z(\cos\theta' - \cos\theta) \end{aligned} \quad (2.58)$$

$W$  が十分に小さいと、傾き  $W_{,x}$  もさらに小さくなり、次式のように近似できる。

$$\sin \theta \approx \tan \theta = W_{,x}, \quad \cos \theta \approx 1$$

$$\sin \theta' \approx \tan \theta' = (W + W_{,x} dx)_{,x}, \quad \cos \theta' \approx 1$$

上式と式(2.58)より、 $ds$  は次のようになる。

$$ds^2 = ds_x^2 + ds_z^2 = \left[ (1 - zW_{,xx})^2 + W_{,x}^2 \right] dx^2 \quad (2.59)$$

$W_{,x}$  が十分に小さいので  $W_{,x}^2$  の項は省略でき、結局  $ds$  は次のようになる。

$$ds = [1 - zW_{,xx}] dx \quad (2.60)$$

よって、はりの単純曲げによる軸方向の微小ひずみ  $\varepsilon_x$  は次式のようにになる。

$$\varepsilon_x = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = -zW_{,xx} \quad (2.61)$$

### 2.8.2 はりの曲げ振動：波動方程式

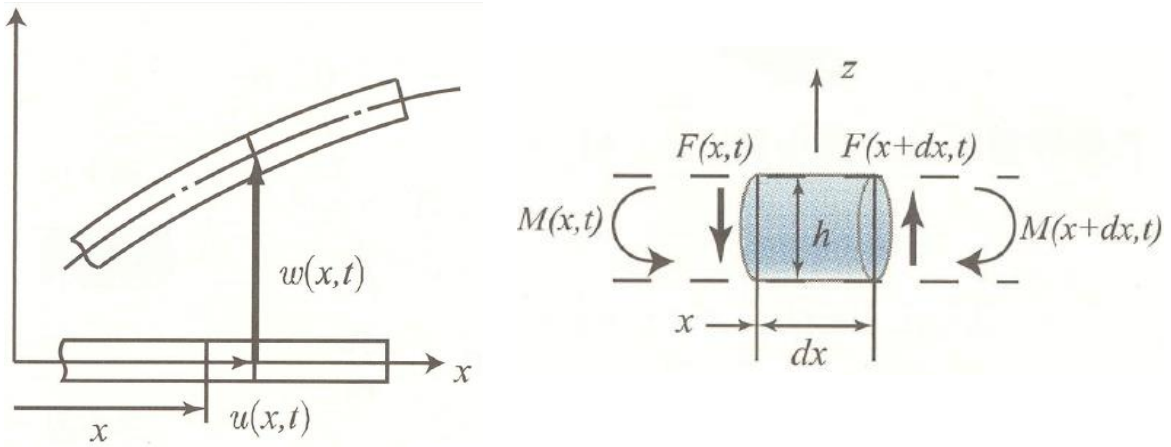


図 2.6 曲げの微小要素

本項でははりの曲げ振動を考えるために波動方程式を算出する。

まず図 2.6 に示すように、はりの微小要素を考える。  $m_s$  を微小質量、  $w_s$  を微小たわみとすると  $Z$  方向の力の釣り合いは

$$m_s \frac{d^2 w_s}{dt^2} = F(x+dx, t) - F(x, t) \quad (2.62)$$

となる。ここでテーラー展開をすると式(2.62)は以下のようにになる。

$$m_s \frac{d^2 w_s}{dt^2} = F(x+dx, t) - F(x, t) = F(x, t) + \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} dx - F(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} dx \quad (2.63)$$

次に  $x$  に関するモーメント  $M$  の釣り合い式を考える.

$$F(x+dx, t)dx - M(x+dx, t) + M(x, t) = 0 \quad (2.64)$$

ここでテーラー展開をすると式(2.64)は

$$F(x, t)dx + \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} dx^2 - M(x, t) - \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx + M(x, t) = 0 \quad (2.65)$$

$$F(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \quad (2.66)$$

となる. ここで  $m_s = \rho dx A$  とする. ここで  $\rho$ ,  $A$  はそれぞれはりの密度と断面積である. 式(2.66)を式(2.63)に代入すると以下になる

$$\rho dx A \frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} dx \Leftrightarrow \rho A \frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.67)$$

ここで減衰係数を  $\eta$ , 断面二次モーメントを  $I$ , ヤング率を  $E$  とすると曲げモーメントの定義より,  $M = -EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \eta I \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial t \partial x^2}$  となるので式(2.67)に代入する.

$$\begin{aligned} \rho A \frac{d^2 w(x, t)}{dt^2} &= -\frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} EI - \eta I \frac{\partial^5 w(x, t)}{\partial t \partial x^4} \\ \rho A \frac{d^2 w(x, t)}{dt^2} + \eta I \frac{\partial^5 w(x, t)}{\partial t \partial x^4} + \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} EI &= 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\alpha^2 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\eta I}{\rho A} \frac{\partial^5 w(x, t)}{\partial t \partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \left( \alpha^2 = \frac{EI}{\rho A} \right) \quad (2.69)$$

式(2.69)は波動方程式である.

### 2.8.3 はりの曲げ振動：固有値と固有振動数の算出

本項では, はりの固有振動数を求める.

変数分離法により解いていく. たわみ  $w$  は  $x$  と  $t$  の関数なので以下のようなになる.

$$w(x, t) = W(x)T(t) \quad (2.70)$$

式(2.70)を式(2.69)に代入する.

$$\begin{aligned} \alpha^2 T(t) \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} + \frac{\eta I}{\rho A} \frac{\partial T(t)}{\partial t} \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} &= -W(x) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \\ \frac{\alpha^2}{W(x)} \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} &= -\frac{1}{\left( \frac{1}{\alpha^2} \frac{\eta I}{\rho A} \frac{\partial T(t)}{\partial t} + T(t) \right)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.71)$$

式(2.71)は $\omega^2$ とおくことで $x$ の関数と $t$ の関数が分けられ、二つの式が算出される。  
 $x$ の関数について解くと

$$\frac{\alpha^2}{W(x)} \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} = \omega^2 \Leftrightarrow \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} - \beta^4 W(x) = 0 \quad \left( \beta^4 = \left( \frac{\omega}{\alpha} \right)^2 \right) \quad (2.72)$$

となる。ここで $\omega$ は角周波数である。次に $t$ の関数について解く

$$-\frac{1}{\left( \frac{1}{\alpha^2} \frac{\eta l}{\rho A} \frac{\partial T(t)}{\partial t} + T(t) \right)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = \omega^2$$

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \frac{\omega^2}{\alpha^2} \frac{\eta l}{\rho A} \frac{\partial T(t)}{\partial t} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (2.73)$$

式(2.72)より $W$ を解く

$$\frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} - \beta^4 W(x) = 0$$

$$\lambda^4 - \beta^4 = 0$$

$$\lambda = \beta, -\beta, i\beta, -i\beta$$

$$W(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x \quad (2.74)$$

境界条件より $W(x)$ の係数を求める。ここで片持ちはりの境界条件を以下に示す。

$$W_{x=0} = 0 \quad \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \quad (2.75)$$

$$\left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{x=l} = 0 \quad \left( \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \right)_{x=l} = 0 \quad (2.76)$$

式(2.74)に条件(2.75)を代入すると以下になる。

$$W(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x$$

$$C_2 + C_4 = 0 \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \beta C_1 \cos \beta x - \beta C_2 \sin \beta x + \beta C_3 \cosh \beta x + \beta C_4 \sinh \beta x$$

$$C_1 + C_3 = 0 \quad (2.78)$$

式(2.74)に式(2.77) 式(2.78)を代入すると

$$W(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x - C_1 \sinh \beta x - C_2 \cosh \beta x$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\beta^2 C_1 \sin \beta x - \beta^2 C_2 \cos \beta x - \beta^2 C_1 \sinh \beta x - \beta^2 C_2 \cosh \beta x$$

となる。ここで境界条件(2.76)を適用する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= -\beta^2 C_1 \sin \beta l - \beta^2 C_2 \cos \beta l - \beta^2 C_1 \sinh \beta l - \beta^2 C_2 \cosh \beta l = 0 \\ C_1(-\sin \beta l - \sinh \beta l) + C_2(-\cos \beta l - \cosh \beta l) &= 0 \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = -\beta^3 C_1 \cos \beta x + \beta^3 C_2 \sin \beta x - \beta^3 C_1 \cosh \beta x - \beta^3 C_2 \sinh \beta x$$

さらに境界条件(2.76)を適用すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} &= -\beta^3 C_1 \cos \beta l + \beta^3 C_2 \sin \beta l - \beta^3 C_1 \sinh \beta l - \beta^3 C_2 \cosh \beta l = 0 \\ C_1(-\cos \beta l - \cosh \beta l) + C_2(-\sin \beta l - \sinh \beta l) &= 0 \end{aligned} \quad (2.80)$$

(2.79)(2.80)より

$$\begin{bmatrix} (-\sin \beta l - \sinh \beta l) & (-\cos \beta l - \cosh \beta l) \\ (-\cos \beta l - \cosh \beta l) & (-\sin \beta l - \sinh \beta l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.81)$$

$$(\cos \beta l + \cosh \beta l)^2 + \sin^2 \beta l - \sinh^2 \beta l = 0$$

$$1 + \cos \beta l \cosh \beta l = 0$$

となる。ここで  $\beta l = \lambda$  と置き変形させると

$$\cos \lambda = -\frac{1}{\cosh \lambda} \quad (2.82)$$

となる。この式が成り立つときの  $\lambda$  は  $1 \sim \infty$  まであり  $\lambda_r (r=1 \sim n)$  が各モードの固有値となる。よって各モードの固有振動数  $\omega_r$  は以下になる。

$$\begin{aligned} \beta l &= \lambda_r \\ \left( \frac{\omega_r}{\alpha} \right)^{1/2} &= \frac{\lambda_r}{l} \\ \omega_r &= \left( \frac{\lambda_r}{l} \right)^2 \alpha \quad \left( \alpha = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \right) \end{aligned} \quad (2.83)$$

式(2.83)が固有振動数の式になる。ここで  $r$  はモード次数 ( $r=1 \sim \infty$ ) を表す。

なお固有値はニュートン法を用いて算出する。

#### 2.8.4 はりの曲げ振動：変位モード関数の算出

本項では片持ちはりにおける変位モード関数を算出する．式(2.77)，式(2.78)を式(2.74)に代入する．

$$W(x) = C_3(\sinh \beta x - \sin \beta x) + C_4(\cosh \beta x - \cos \beta x) \quad (2.84)$$

ここで式(2.81)より

$$\begin{aligned} C_2 &= -\frac{\sin \beta l + \sinh \beta l}{\cos \beta l + \cosh \beta l} C_1 \\ C_2 &= \frac{\sin \beta l + \sinh \beta l}{\cos \beta l + \cosh \beta l} C_3 \\ C_3 &= \frac{\cos \beta l + \cosh \beta l}{\sin \beta l + \sinh \beta l} C_2 = -\frac{\cos \beta l + \cosh \beta l}{\sin \beta l + \sinh \beta l} C_4 \end{aligned} \quad (2.85)$$

となる．式(2.85)を式(2.84)に代入する．

$$\begin{aligned} W(x) &= -C_4 \frac{\cos \beta l + \cosh \beta l}{\sin \beta l + \sinh \beta l} (\sinh \beta x - \sin \beta x) + C_4 (\cosh \beta x - \cos \beta x) \\ &= \frac{C_4}{\sin \beta l + \sinh \beta l} \left\{ (\cosh \beta x - \cos \beta x)(\sin \beta l + \sinh \beta l) \right. \\ &\quad \left. - (\sinh \beta x - \sin \beta x)(\cos \beta l + \cosh \beta l) \right\} \end{aligned} \quad (2.86)$$

$\beta l = \lambda_r$  とおくと  $r$  次の固有振動数に対する基準関数  $W_r(x)$  が得られる．

$$\begin{aligned} W_r(x) &= \frac{C_4}{\sin \lambda_r + \sinh \lambda_r} \left\{ \left( \cosh \frac{\lambda_r}{l} x - \cos \frac{\lambda_r}{l} x \right) (\sin \lambda_r + \sinh \lambda_r) \right. \\ &\quad \left. - \left( \sinh \frac{\lambda_r}{l} x - \sin \frac{\lambda_r}{l} x \right) (\cos \lambda_r + \cosh \lambda_r) \right\} \end{aligned} \quad (2.87)$$

式(2.87)中の  $C_4$  は必要がないため，本研究では 1 とする．図 2.7 に横軸をはりの長さ(1m)にし，変位モード関数を 1 次から 5 次まで図示したものを示す．

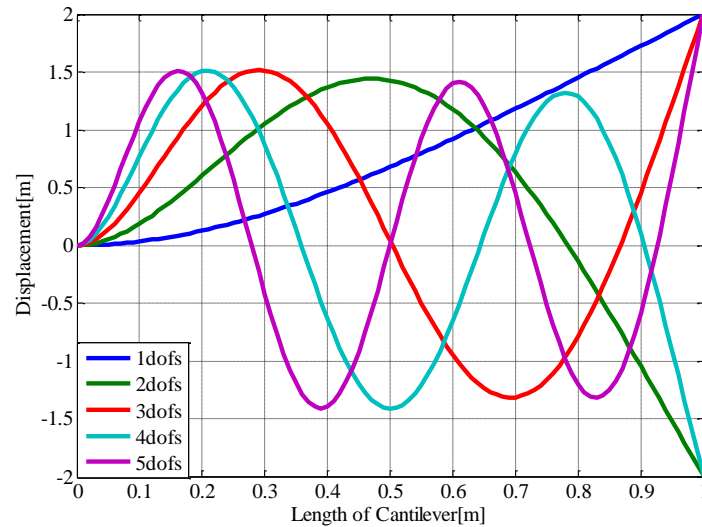


図 2.7 変位モード



### 2.8.5 はりの曲げ振動：応答とひずみモード関数の算出

本項では、片持ちはりにおける強制加振による応答とひずみモード関数を算出する。

まず初期条件より  $T(t)$  を求める。  $T(t)$  を求めるには、はりに強制振動が働いている場合を考える。式(2.69)の右辺を  $f(x, t)$  とすると、

$$\alpha^2 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\eta l}{\rho A} \frac{\partial^5 w(x, t)}{\partial t \partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho A} f(x, t) \quad \left( \alpha^2 = \frac{EI}{\rho A} \right) \quad (2.88)$$

となる。  $W_r(x) (0 \leq x \leq l)$  とおくと、式(2.88)の解は基準関数の重ね合わせの形になるので

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^n W_r(x) T_r(t) \quad (2.89)$$

とおける。ここで

$$w(x, t) = W_r(x) e^{j\omega t} \quad (r = 1, 2, 3) \quad (2.90)$$

とおくと、はりの自由振動の式(2.68)を満たす。よって式(2.90)を、減衰項を消した式(2.68)に代入すると以下が得られる。

$$(\alpha^2) \frac{d^4 W_r}{dx^4} = \omega_r^2 W_r \quad (2.91)$$

式(2.89)を式(2.88)に代入し式(2.91)を用いて、整理すると

$$\sum_{r=1}^n W_r(x) \left( \frac{d^2 T_r}{dt^2} + \frac{\omega_r^2}{\alpha^2} \frac{\eta l}{\rho A} \frac{dT_r}{dt} + \omega_r^2 T_r \right) = \frac{1}{\rho A} f(x, t) \quad (2.92)$$

となる。両辺に  $W_r(x)$  をかけて  $0 \sim l$  で積分する。ここで基準関数では直交性が成り立つことを考慮すると式(2.92)は以下ようになる。

$$\frac{d^2 T_r}{dt^2} + \frac{\omega_r^2}{\alpha^2} \frac{\eta l}{\rho A} \frac{dT_r}{dt} + \omega_r^2 T_r = \frac{\int_0^l W_r(x) f(x, t) dx}{\rho A \int_0^l W_r^2(x) dx} \quad (2.93)$$

式(2.93)は1自由度系の式と同一になる。ここで減衰項を考えると式(2.93)は以下になる。

$$\frac{d^2 T_r}{dt^2} + 2\zeta \omega_r \frac{dT_r}{dt} + \omega_r^2 T_r = \frac{\int_0^l W_r(x) f(x, t) dx}{\rho A \int_0^l W_r^2(x) dx} \quad (2.94)$$

式(2.94)を用いて  $T(t)$  の係数を求める。  $f(x, t) = \delta(x - \bar{x}) F e^{j\omega t}$  (インパルス加振) とすると

以下のようになる。

$$\frac{d^2 T_r}{dt^2} + 2\zeta \omega_r \frac{dT_r}{dt} + \omega_r^2 T_r = \frac{\int_0^l W_r(x) f(x, t) dx}{\rho A \int_0^l W_r^2(x) dx} = \frac{F e^{j\omega t}}{\rho A l} W_r(\bar{x}) \quad (2.95)$$

式(2.95)に  $T_r(t) = X e^{j\omega t}$  を代入すると以下ようになる。

$$X(\omega_r^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_r\omega j)e^{j\omega t} = \frac{F e^{j\omega t}}{\rho A l} W_r(\bar{x})$$

$$X = \frac{F}{\rho A l(\omega_r^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_r\omega j)} W_r(\bar{x}) \quad (2.96)$$

よって  $T_r(t)$  は  $F=1$  とすると以下のように求められる。

$$T_r(t) = \frac{W_r(\bar{x})}{\rho A l(\omega_r^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_r\omega j)} e^{j\omega t} \quad (2.97)$$

以上より  $W_r$ ,  $T_r$  が求まったため、それらを用いて応答を求める。

応答：たわみ  $w(x, t)$

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^a W_r(x) T_r(t) = \sum_{r=1}^a \frac{W_r(x) W_r(\bar{x})}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_r\omega j) \rho A l} e^{j\omega t} \quad (2.98)$$

$$W_r(x) = \frac{C_4}{\sin \lambda_r + \sinh \lambda_r} \left\{ \left( \cosh \frac{\lambda_r}{l} x - \cos \frac{\lambda_r}{l} x \right) (\sin \lambda_r + \sinh \lambda_r) \right. \\ \left. - \left( \sinh \frac{\lambda_r}{l} x - \sin \frac{\lambda_r}{l} x \right) (\cos \lambda_r + \cosh \lambda_r) \right\} \quad (2.99)$$

応答：加速度  $\ddot{w}(x, t)$

$$\ddot{w}(x, t) = -\omega^2 \sum_{r=1}^a w(x, t) = -\omega^2 \sum_{r=1}^a \frac{W_r(x) W_r(\bar{x})}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_r\omega j) \rho A l} e^{j\omega t} \quad (2.100)$$

応答：ひずみ  $\varepsilon_x(x, t)$

$$\varepsilon_x(x, t) = -z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = -z \sum_{r=1}^a \left( \frac{\lambda_r}{l} \right)^2 \frac{W_r^\varepsilon(x) W_r(\bar{x})}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_r\omega j) \rho A l} e^{j\omega t} \quad (2.101)$$

$$W_r^\varepsilon(x) = \frac{C_4}{\sin \lambda_r + \sinh \lambda_r} \left\{ \left( \cosh \frac{\lambda_r}{l} x + \cos \frac{\lambda_r}{l} x \right) (\sin \lambda_r + \sinh \lambda_r) \right. \\ \left. - \left( \sinh \frac{\lambda_r}{l} x + \sin \frac{\lambda_r}{l} x \right) (\cos \lambda_r + \cosh \lambda_r) \right\} \quad (2.102)$$

式(2.102)はひずみモード関数である。式(2.102)中の  $C_4$  は必要ないため本研究では1とする。図2.8に横軸をはりの長さ(1m)とし、ひずみモード関数を1次から5次まで図示したものを示す。

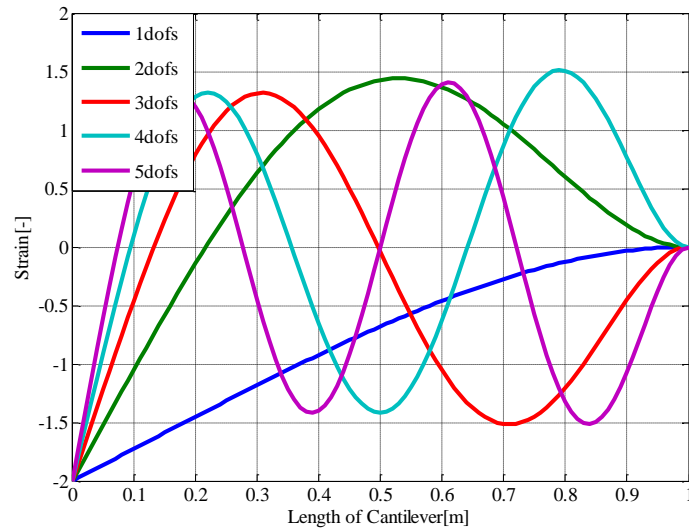


図 2.8 ひずみモード

### 2.8.6 はりの曲げ振動：周波数応答関数の算出

本項では式(2.100), 式(2.101)を用いて片持ちはりにおける加速度とひずみの周波数応答関数を算出する.

アクセラランス(FRF)

$$H(\omega) = \frac{\ddot{w}(x, t)}{F(x, t)} = \frac{\ddot{w}(x, t)}{e^{j\omega t}} = -\omega^2 \sum_{r=1}^a \frac{W_r(x)W_r(\bar{x})}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_r\omega j)\rho A l} \quad (2.103)$$

$$W_r(x) = \frac{1}{\sin \lambda_r + \sinh \lambda_r} \left\{ \left( \cosh \frac{\lambda_r}{l} x - \cos \frac{\lambda_r}{l} x \right) (\sin \lambda_r + \sinh \lambda_r) - \left( \sinh \frac{\lambda_r}{l} x - \sin \frac{\lambda_r}{l} x \right) (\cos \lambda_r + \cosh \lambda_r) \right\} \quad (2.87)$$

ひずみ周波数応答関数(SFRF)

$$H_\varepsilon(\omega) = \frac{\varepsilon_x(x, t)}{F(x, t)} = \frac{\varepsilon_x(x, t)}{e^{j\omega t}} = -z \sum_{r=1}^a \left( \frac{\lambda_r}{l} \right)^2 \frac{W_r^\varepsilon(x)W_r(\bar{x})}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_r\omega j)\rho A l} \quad (2.104)$$

$$W_r^\varepsilon(x) = \frac{1}{\sin \lambda_r + \sinh \lambda_r} \left\{ \left( \cosh \frac{\lambda_r}{l} x + \cos \frac{\lambda_r}{l} x \right) (\sin \lambda_r + \sinh \lambda_r) - \left( \sinh \frac{\lambda_r}{l} x + \sin \frac{\lambda_r}{l} x \right) (\cos \lambda_r + \cosh \lambda_r) \right\} \quad (2.102)$$

ここで式(2.103)と式(2.104)中の  $a$  は採用モード数である.

## 第 3 章 周波数応答関数の比較

### 3.1 周波数応答関数の比較の概要

入力同定を行うためには周波数応答関数の推定が必要であり，この周波数応答関数の性質や状態は入力同定精度に多大な影響を与えることがわかっている．実際，入力同定に用いる周波数応答関数は少しでも他のモードの影響を受けることで，周波数応答関数行列の悪条件が緩和され，同定精度向上が期待できるとされている．よって周波数応答関数の性質や状態を把握することが重要である．

本章では数値計算を用いて第2章8節で算出した片持ちはりにおけるアクセラランス(式(2.103)，以下 FRF)及びひずみ応答周波数応答関数(式(2.104)，以下 SFRF)の比較を行い，高次モードの影響度について検討することを目的とする．本数値計算では高次モードの影響について明らかにするために，採用モード数を変えて各周波数応答関数を比較する．

$$H(\omega) = -\omega^2 \sum_{r=1}^a \frac{W_r(x)W_r(\bar{x})}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_r\omega j)\rho A l} \quad (2.103)$$

$$H_\varepsilon(\omega) = -z \sum_{r=1}^a \left( \frac{\lambda_r}{l} \right)^2 \frac{W_r^\varepsilon(x)W_r^\varepsilon(\bar{x})}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_r\omega j)\rho A l} \quad (2.104)$$

### 3.2 解析モデル

数値計算に用いる片持ちはりを図 3.1 に示す．またこの片持ちはりの寸法及び材料特性を表 3.1 に示す．

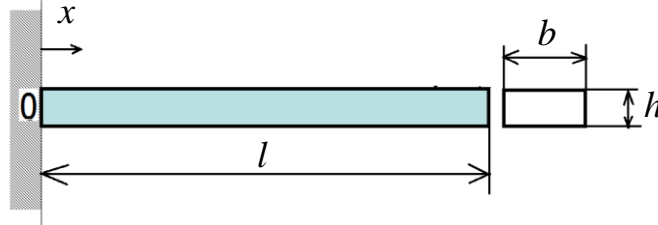


図 3.1 片持ちはり

表 3.1 材料特性

$b[\text{m}]$	$h[\text{m}]$	$\rho[\text{kg/m}^3]$	$E[\text{GPa}]$	$l[\text{m}]$	$\zeta[-]$
0.03	0.01	$2.69 \times 10^3$	70.6	1	0.01

### 3.3 解析条件

#### 3.3.1 加振点と応答点の位置

比較する周波数応答関数は1点加振1点応答とする．加振点の位置は変えずに応答点の位置を変え，それぞれを比較していく．比較項目としては自己周波数応答関数と相互周波数応答関数である．加振点，応答点位置を表 3.2 に示す．

表 3.2 加振点と応答点位置

Case	Response Point[m]	Excitation Point[m]
Driving Point Response	0.6	0.6
Cross Response	0.9	0.6

### 3.3.2 採用モード数と解析周波数

本数値計算では高次モードの影響を観察するために、FRF(式(2.103))、SFRF(式(2.104))の式中にある採用モード数  $a$  の値を変えて周波数応答関数の比較を行う。FRF 及び SFRF 共に採用モード数  $a$  は  $a=5,10,50$  の場合をそれぞれ算出する。

また数値計算を行う周波数範囲は  $0\sim 800[\text{Hz}]$  とし、周波数分解能は  $0.25[\text{Hz}]$  とした。

## 3.4 周波数応答関数の比較結果

図 3.2, 図 3.3 に加振点:  $x=0.6\text{m}$ , 応答点:  $x=0.6\text{m}$  とし、周波数を  $0\text{Hz}$  から  $800\text{Hz}$  まで変化させ、採用モード数  $a$  を  $5,10,50$  と変化させたときの FRF 及び SFRF を示す。図 3.4, 図 3.5 に同様の条件で加振点:  $x=0.6\text{m}$ , 応答点:  $x=0.9\text{m}$  としたときの FRF 及び SFRF を示す。

図 3.2～図 3.5 より、自己周波数応答関数の場合では採用モード数を増やすことによって、特に SFRF は反共振点の位置が大きく変化し、高次モードの影響を強く受けていることがわかる。加振点応答において  $\text{FRF} \cdot \text{SFRF}$  が採用モード数に応じて変化するのは、 $\text{FRF} \cdot \text{SFRF}$  の高次のモード成分が剰余剛性として対象周波数範囲に影響を与えているためと考えられる。よって共振時においても加振点応答におけるひずみ応答は、卓越したモードだけでなく他のモードの情報も抽出することができると考えられる。一方で相互応答では FRF 及び SFRF のどちらも採用モード数の変化の影響をほとんど受けていないことがわかる。

この現象の理由を式(2.104)より考察する。SFRF は高次において各固有モード成分に乗じる固有値  $\lambda_r$  が大きくなる。すると高次のモード成分の振幅が大きくなり、それらを重ね合わせることによって低周波域により大きな影響が生じる。さらに加振点応答付近ではモード定数の符号がほぼ同符号になることによって、入力と応答がほぼ同相になり固有モード間には反共振点が生じるため、より低周波に影響が生じやすくなる。以上の理由により、加振点における SFRF は高次モードの影響が大きくなったと考えられる。この特徴は、本質的にひずみが変位の二階微分であるためであり、はり構造物以外においても同様に成り立つと考えられる。なおひずみは加振力に対して垂直方向の応答のために、厳密な加振点応答は存在しないと考えられる。

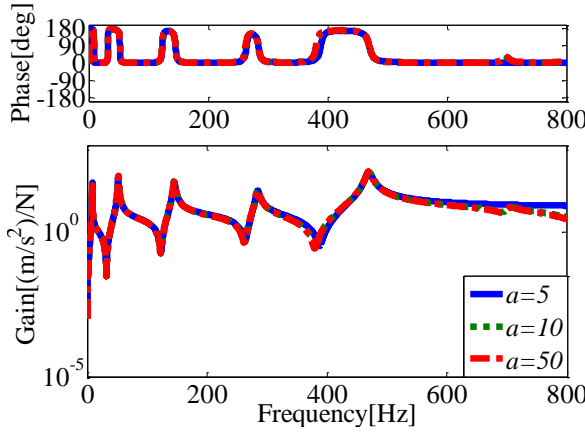


図 3.2 FRF (自己周波数応答関数)

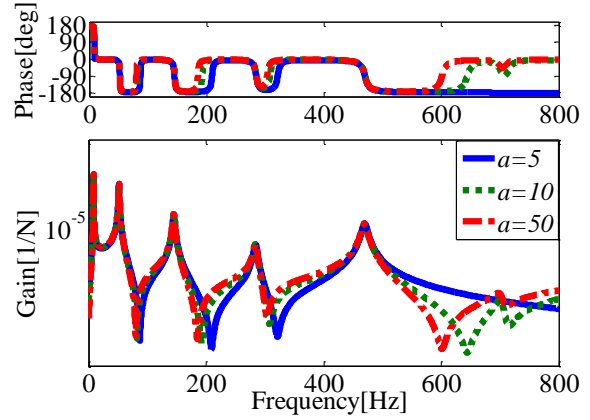


図 3.3 SFRF (自己周波数応答関数)

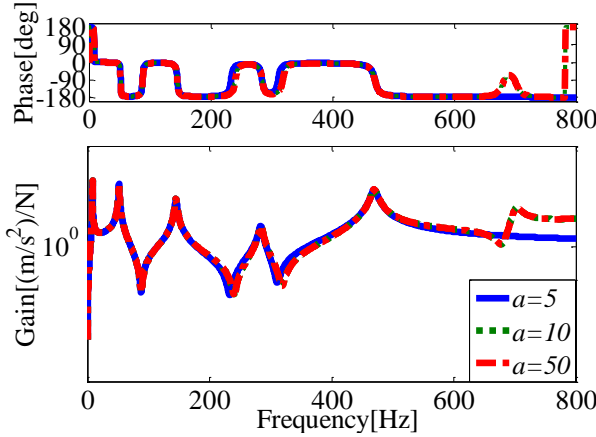


図 3.4 FRF (相互周波数応答関数)

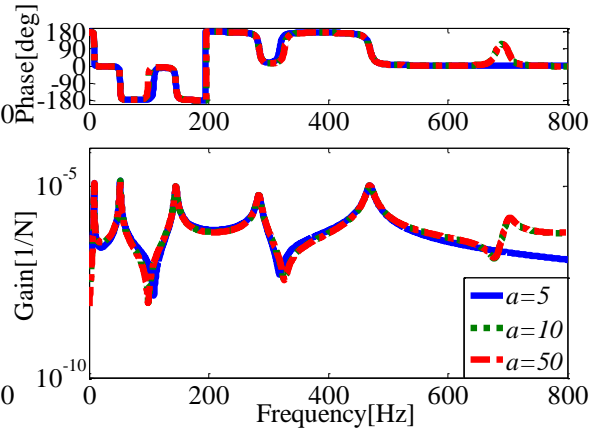


図 3.5 SFRF (相互周波数応答関数)

### 3.5 高次モードの影響度による比較

本節では3・4節同様に周波数応答関数を描き、以下の式より片持ちはりの各応答点で高次モードの影響度  $A_f$  を算出し FRF と SFRF の比較を行う。

$$A_f = \frac{\frac{1}{M} \sum_u^M |C_{high}(\omega_u)|}{\frac{1}{M} \sum_u^M |C_{low}(\omega_u)|} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} C_{high}(\omega_u) : \text{解析周波数範囲に存在する 7 次} \sim \text{50 次}(a=7 \sim 50) \text{ までのモード成分} \\ C_{low}(\omega_u) : \text{解析周波数範囲に存在する 6 次までのモード成分}(a=1 \sim 6) \text{ のモード成分} \end{cases}$$

図 3.6, 図 3.7 にそれぞれ図 1 の片持ちはりにおいて,  $x=0.6[\text{m}]$ ,  $x=0.9[\text{m}]$  の位置を加振した場合の各応答点の高次モードの影響度を示す。図 3.6, 図 3.7 より加振点だけではなく加振点付近における SFRF も高次モードの影響が大きくなっていることがわかる。この理由は

3・4節で述べたものと同様である．また加振点付近以外ではFRFの方が高次モードの影響がわずかに大きい傾向が見られる．

以上より，入力同定において加振点付近のひずみ応答を採用することによって，入力同定に使用する周波数応答関数は高次モードの影響を大きく受けるため，同定精度が向上すると考えられる．

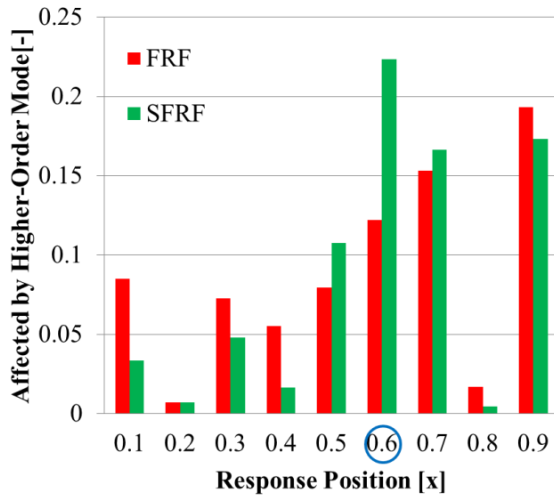


図 3.6 高次モードの影響度  $A_f$   
加振点：0.6[m]

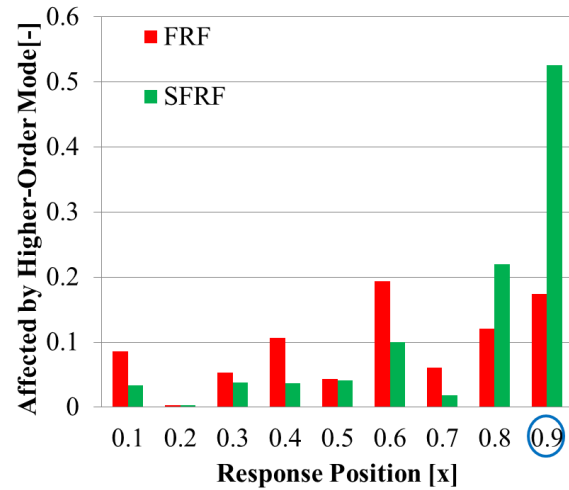


図 3.7 高次モードの影響度  $A_f$   
加振点：0.9[m]

### 3.6 第3章のまとめ

第3章では各応答(加速度，ひずみ)における周波数応答関数の高次モードの影響を検討するために数値計算を行った．

数値計算の結果，自己周波数応答関数の場合では採用モード数を増やすことによって，特にSFRFは反共振点の位置が大きく変化し，高次モードの影響を強く受けていることが明らかになった．また式(3.1)を用いて高次モードの影響度を計算した結果，加振点のみではなく加振点付近もSFRFは高次モードの影響を受けていることがわかった．さらに加振点付近以外ではFRFの方が高次モードの影響がわずかに大きい傾向が見られた．

よって入力同定にひずみ計を用いた場合，加振点付近の応答点を採用することによって入力同定精度が向上すると考えられる．



## 第 4 章

# 数値シミュレーション

## 4.1 数値シミュレーションの概要

本章では加速度応答を用いた入力同定とひずみ応答を用いた入力同定を比較するために、数値シミュレーションによって入力同定を行う。数値シミュレーションによる入力同定は、各計測値の混入誤差の大きさに偏りがない理想的な条件で検討を行うことができるため、実験による計測データを用いた入力同定を行う前に、現象の傾向を把握することができる。本章の数値シミュレーションは片持ちはりを解析モデルとし、第2章8節で算出したアクセラランス(式(2.103)、以下 FRF)及びひずみ応答周波数応答関数(式(2.104)、以下 SFRF)を用いて行う。

本章では応答計測点に加振点応答を採用した場合と採用しない場合でそれぞれ数値シミュレーションを行う。さらに得られた加振力と推定した周波数応答関数から各点の応答を計算する再合成を行い、従来法と提案法の再合成精度の比較を行う。

なお本数値シミュレーションには MATLAB を用いる。

## 4.2 数値シミュレーションの方法

### 4.2.1 シミュレーションのモデル

シミュレーションに用いる片持ちはりを図 4.1 に示す。またこの片持ちはりの材料特性を表 4.1 に示す。材料はアルミニウムとする。

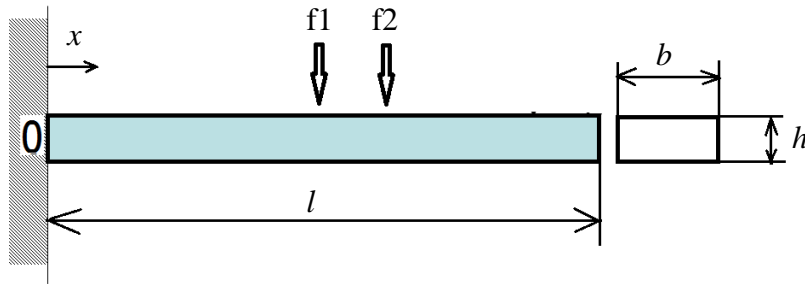


図 4.1 片持ちはり

表 4.1 材料特性

$b[\text{m}]$	$h[\text{m}]$	$\rho[\text{kg/m}^3]$	$E[\text{GPa}]$	$l [\text{m}]$
0.03	0.01	$2.69 \times 10^3$	70.6	1

## 4.2.2 シミュレーションの手順

入力同定は初めに周波数応答関数を推定し，次に実稼働時における応答を計測するという2つの工程からなる．本シミュレーションも周波数応答関数の推定，実稼働応答の計測という手順からなる．本シミュレーションのフローチャートを図4.2に示す．またシミュレーションの手順の詳細を(a)~(f)に示す．

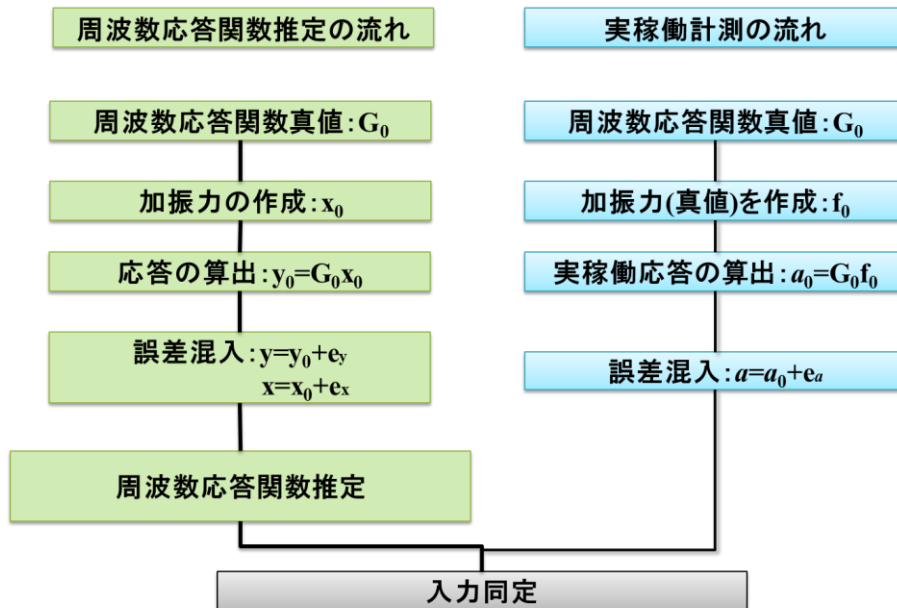


図4.2 シミュレーションフローチャート

## (a) 加振力の算出

加振力を算出する．加振力はランダム加振を模擬した乱数とした．このランダム加振はMATLAB上で作成し，平均0，標準偏差1の乱数を実部と虚部に持つようにした．加振力は全周波数で同一とした．

## (b) 応答の算出

第2章8節で算出した各応答の周波数応答関数(FRF, SFRF)に(a)で算出した加振力を乗じることで応答データである加速度及びひずみを算出する．加速度はFRFに加振力をかけることで算出する．同様にひずみはSFRFに加振力をかけることで算出する．

## (c) 誤差の混入

手順(a), (b)で算出した加振力と応答に誤差を混入し，周波数応答関数推定に使用する加振力，応答データを算出する．誤差はそれぞれの加振力，応答の真値に，混入する誤差の二乗平均が，誤差を混入する元のデータの二乗平均の何倍かを表す誤差調整係数  $\alpha_{\text{error}}$  をかけることにより算出する．

### 加速度の誤差

点  $i$  における加速度の真値を  $y_i(\omega)$  とする．ここで  $y_i(\omega) = [y_i^{(1)}(\omega) \cdots y_i^{(N)}(\omega)]$  で、列ベクトルである．ここで  $y_i^{(k)}(\omega)$  は点  $i$  における  $k$  番目の計測で得られた加速度であり、平均回数  $N$  回だけ存在する． $y_i(\omega)$  に加える誤差  $y_{error,i}(\omega)$  は次式で算出する．

$$y_{error,i}(\omega) = \mathbf{E}_i(\omega) \times \sqrt{\frac{a_{error} \times \left( \sum_k^N |y_i^{(k)}(\omega)|^2 \right) / N}{\left( \sum_k^N |e_i^{(k)}(\omega)|^2 \right) / N}} \quad (4.1)$$

$\mathbf{E}_i(\omega)$  は  $\mathbf{E}_i(\omega) = [e_i^{(1)}(\omega) \cdots e_i^{(N)}(\omega)]$  であり、 $e_i^{(k)}(\omega)$  は  $e_i^{(k)}(\omega) = e_{re,i}^{(k)}(\omega) + j \cdot e_{im,i}^{(k)}(\omega)$  (この  $j$  は虚数) であり、 $e_{re,i}^{(k)}(\omega)$  と  $e_{im,i}^{(k)}(\omega)$  はそれぞれ平均 0、標準偏差 1 の乱数であり、全周波数で独立である．

### ひずみの誤差

点  $i$  におけるひずみの真値を  $\varepsilon_i(\omega)$  とする．ここで  $\varepsilon_i(\omega) = [\varepsilon_i^{(1)}(\omega) \cdots \varepsilon_i^{(N)}(\omega)]$  で、列ベクトルである．ここで  $\varepsilon_i^{(k)}(\omega)$  は点  $i$  における  $k$  番目の計測で得られたひずみであり、平均回数  $N$  回まで存在する． $\varepsilon_i(\omega)$  に加える誤差  $\varepsilon_{error,i}(\omega)$  は次式で算出する．

$$\varepsilon_{error,i}(\omega) = \mathbf{E}_i(\omega) \times \sqrt{\frac{a_{error} \times \left( \sum_k^N |\varepsilon_i^{(k)}(\omega)|^2 \right) / N}{\left( \sum_k^N |e_i^{(k)}(\omega)|^2 \right) / N}} \quad (4.2)$$

### 加振力の誤差

点  $j$  における加振力の真値を  $x_j(\omega)$  とし、 $x_j^{(k)}(\omega)$  を点  $j$  における  $k$  番目の計測で得られた加振力とすると、 $x_j(\omega)$  に加える誤差  $x_{error,j}(\omega)$  は次式で算出する．

$$x_{error,j}(\omega) = \mathbf{E}_j(\omega) \times \sqrt{\frac{a_{error} \times \left( \sum_k^N |x_j^{(k)}(\omega)|^2 \right) / N}{\left( \sum_k^N |e_j^{(k)}(\omega)|^2 \right) / N}} \quad (4.3)$$

$\mathbf{E}_j(\omega)$  は  $\mathbf{E}_j(\omega) = [e_j^{(1)}(\omega) \cdots e_j^{(N)}(\omega)]$  であり、実部と虚部にそれぞれ平均 0、標準偏差 1 の乱数を持つ数であり、全周波数で全て独立である．

(d) 周波数応答関数の算出

(a)～(c)で算出した誤差を含む加振力、応答データを用いて周波数応答関数を推定する。

(e)入力同定用の加速度データの算出

周波数応答関数推定用のデータとは別に(a), (b)の手順で, 加振力および応答を算出する。

(a), (b)の手順で得られた加振力を, 入力同定された値と比較、評価するための真値とする。

さらに入力同定用のデータとして応答データに手順(c)の方法で誤差を混入する。

(f)入力同定

手順(d)で得られた FRF、SFRF 及び手順(e)で得られた入力同定用の応答データを用いて入力同定を行う。

#### 4.2.3 シミュレーションの条件

周波数範囲は 0～800[Hz]までとし, 周波数分解能は 0.25[Hz]とした。モード減衰比は一律に 1%, 採用モード数は 50 とし, 入力は 2 点同時加振とした。シミュレーションにおける周波数応答関数推定の平均回数及び入力同定の平均回数は 50 回とし, また誤差調整係数は 0.1 とした。

本シミュレーションでは応答計測点に加振点応答を採用した場合と採用しない場合でそれぞれ検討を行う。

### 4.3 入力同定：加振点応答を採用した場合

本節では応答計測点に加振点応答を採用し、加速度応答のみ、またひずみ応答のみを用いて入力同定を行う場合を考える。入力同定は逆行列法と動質量法を用いて行う。入力同定の評価方法としては、周波数平均誤差、条件数、同定加振力の分散、信頼係数を用いる。

図 4.1 における片持ちはりの加振点と応答点の条件を表 4.2 に示す。この条件におけるひずみ及び加速度の計測点は加振点応答を含んだものである。なお本節では主に **Case A** の結果を示していき、**Case B** の結果は第 4 章 3 節 5 項に入力同定結果のみを示す。

表 4.2 加振点・応答点位置

Case	Response Point[m]				Excitation Point[m]	
					f1	f2
A	Acceleration/Strain				0.5	0.6
	0.1	0.2	0.5	0.6		
B	Acceleration/Strain				0.5	0.6
	0.2	0.5	0.6	0.8		

#### 4.3.1 周波数応答関数推定

図 4.3, 図 4.4 に加振点： $x=0.6\text{m}$ 、応答点： $x=0.6$  としたときに推定された FRF, SFRF とそれらの真値を示す。図 4.3, 図 4.4 より FRF, SFRF 共に、反共振点において誤差が大きくなっているが概ね一致していることがわかる。

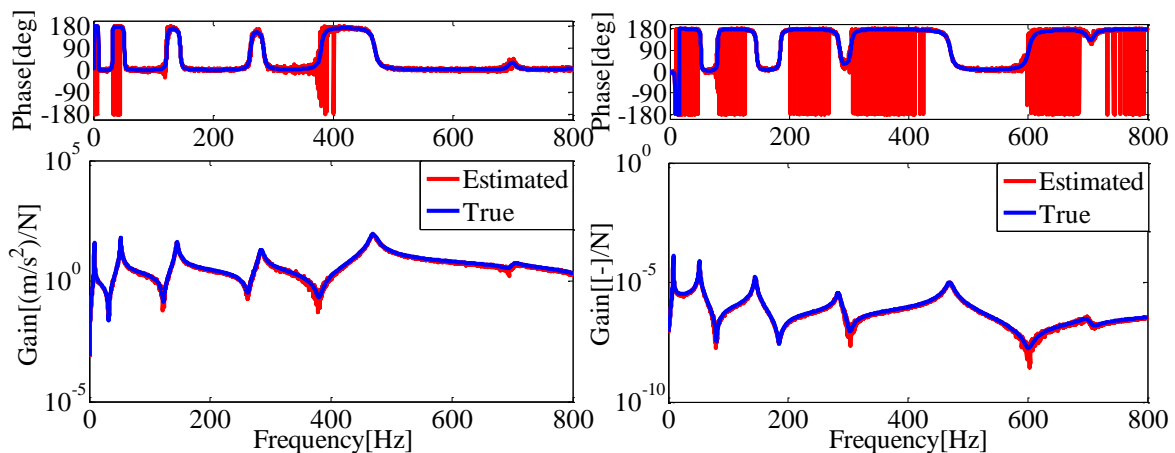


図 4.3 FRF(加振点  $x=0.6$ , 応答点  $x=0.6$ )

図 4.4 SFRF (加振点  $x=0.6$ , 応答点  $x=0.6$ )

### 4.3.2 入力同定結果：Case A

本項では各応答(Case A)を用いた入力同定によって得られた加振力のパワースペクトルと同定誤差を比較する。本シミュレーションでは  $f1(x=0.5)$ ,  $f2(x=0.6)$  の 2 つの加振力が得られるが、パワースペクトルは  $f2$  の結果を示していく。

まず逆行列法を用いた入力同定の結果を示す。図 4.5 に  $f2$  のパワースペクトルを示す。図中の縦の実線は固有振動数を示し、M.I.は逆行列法を示す。また図 4.6 に  $f1$ ,  $f2$  の周波数平均誤差を示す。図 4.5 よりいくつかの固有振動数付近において誤差が大きくなっていることがわかる。1 次、2 次、4 次の固有振動数付近において SFRF を用いた入力同定の方が精度は高いことがわかる。しかし 600~700Hz では SFRF の精度が低下している。図 4.6 より SFRF の方が従来法よりも周波数平均誤差が小さくなっており、同定精度が高くなっていることがわかる。以上より SFRF を用いた入力同定は精度が低下する周波数が存在するが、平均すると従来法よりも誤差が小さくなっていることが確認できる。

次に動質量法を用いた入力同定の結果を示す。図 4.7 に  $f2$  のパワースペクトルを示す。図中の縦の実線は固有振動数を示し、A.M.は動質量法を示す。また図 4.8 に周波数平均誤差を示す。図 4.7 よりいくつかの固有振動数付近において誤差が大きくなっている。逆行列法と同様に、1 次、2 次、4 次の固有振動数付近においては SFRF を用いた入力同定の方が精度は高い。しかし 700Hz 付近では SFRF の方が精度は悪くなっている。図 4.8 より SFRF の方が従来法よりもわずかに周波数平均誤差が小さくなっている。また逆行列法と比較すると FRF, SFRF 共に動質量法の方が誤差は小さい。これは動質量法が逆行列を用いた計算を避けていること、また動質量法は入力加振力の予測誤差が最小となるように動質量行列を推定していることが理由と考えられる。さらに逆行列法によって同定される加振力は計測値に対して過大評価する傾向があるが、動質量法によって同定される加振力は精度が高くなっているものの計測値に対して過小評価される傾向があることが確認された。

以上より加振点応答を採用した場合、逆行列法、動質量法共に SFRF を用いた方が入力同定精度は高くなる傾向があることがわかった。この理由を第 3 章の周波数応答関数の比較結果を踏まえて考察する。入力同定では、固有振動数近傍においてその固有モードが支配的になるため、周波数応答関数行列は悪条件になる。この周波数領域において、高次モードの影響を少しでも受けることによって、応答は加振点ごとに異なる振動形状を示し、周波数応答関数行列の悪条件が緩和されると考えられる。本節では応答計測点に加振点応答を採用しているため、SFRF は FRF よりも高次モードの影響を強く受けている。よって SFRF を用いた入力同定は精度が上昇したと考えられる。

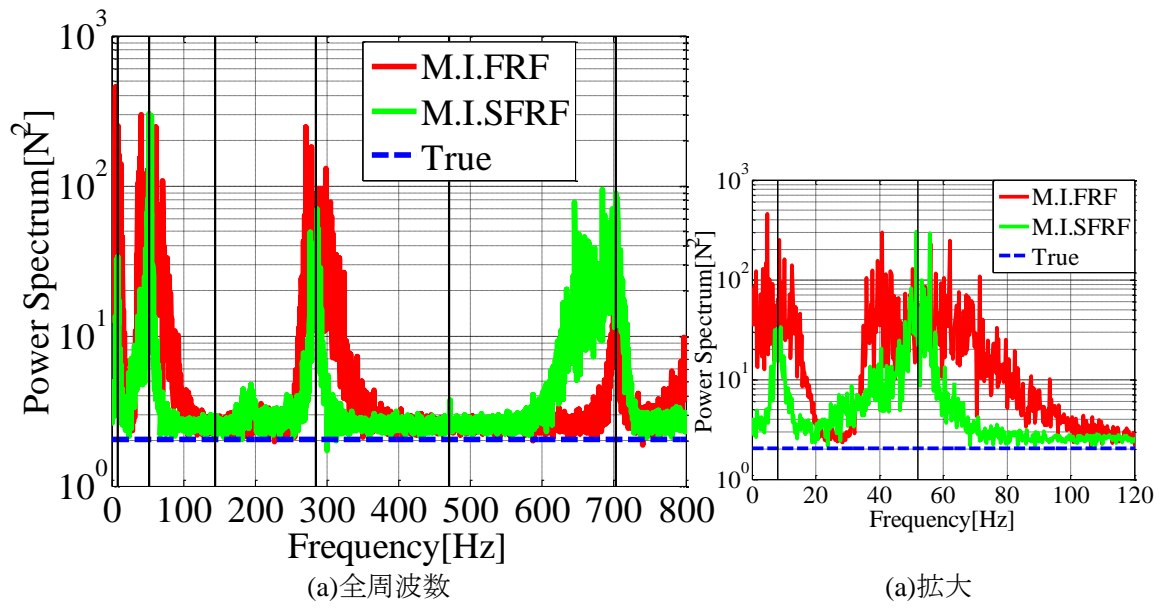


図 4.5 同定加振力のパワースペクトル (f2, Case A, 逆行列法)

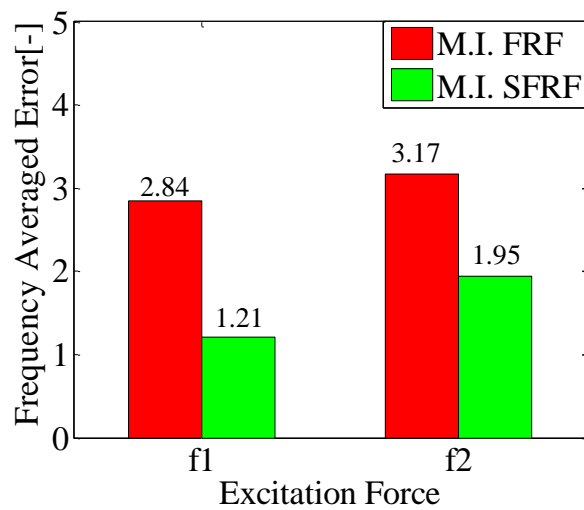


図 4.6 周波数平均誤差(Case A, 逆行列法)



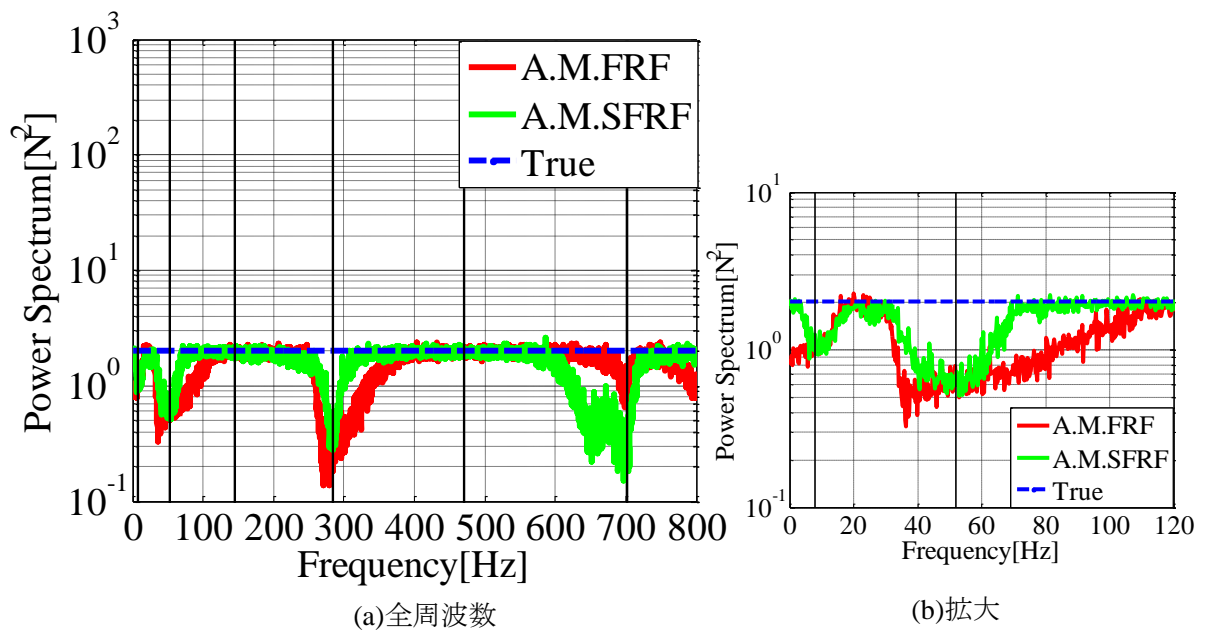


図 4.7 同定加振力のパワースペクトル(f2, Case A, 動質量法)

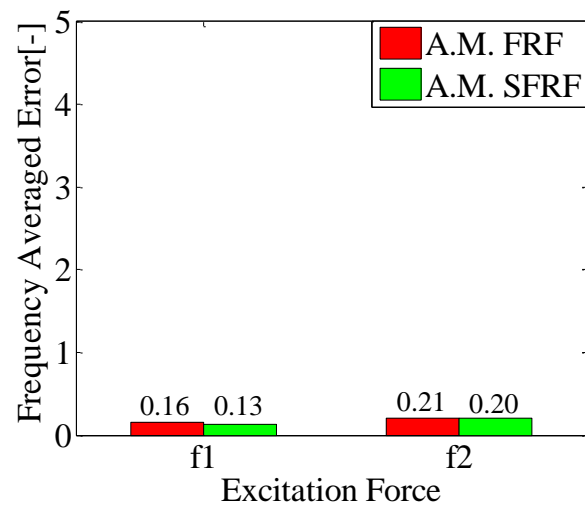


図 4.8 周波数平均誤差(Case A, 動質量法)

### 4.3.3 条件数：Case A

本項では加振力の誤差伝播を評価する指標である条件数を用いて、逆行列法における FRF と SFRF を比較する。条件数は誤差伝播が大きい周波数において値が大きくなるものである。

図 4.9 に逆行列法における FRF と SFRF の条件数を示す。図中の縦の実線は固有振動数を示す。

図 4.9 より固有振動数において条件数が大きくなっていることがわかる。これは固有振動数近傍においては 1 つのモードが支配的になるために、周波数応答関数のランクが 1 に近い状態、つまり悪条件になっているためと考えられる。1 次、2 次、3 次の固有振動数付近において SFRF の方が条件数は小さい傾向があることがわかる。これは計測応答点に加振点応答を採用しているため、SFRF は高次モードの影響が大きく、周波数応答関数行列の悪条件が緩和されているためと考えられる。しかし 6 次の固有振動数において SFRF は FRF よりも条件数が大きくなっていることがわかる。

また FRF、SFRF 共に 3 次、5 次の固有振動数付近の条件数は大きくなっているが、第 4 章 3 節 2 項の図 4.5 では 3 次、5 次の固有振動数付近の同定精度は良好であることがわかる。このことから必ずしも条件数が高い周波数において入力同定精度が低下するわけではないことがわかる。これは、条件数は誤差が拡大される上限値を表しているのであり、計測データに含まれる誤差を統計的に評価する指標ではないためである。

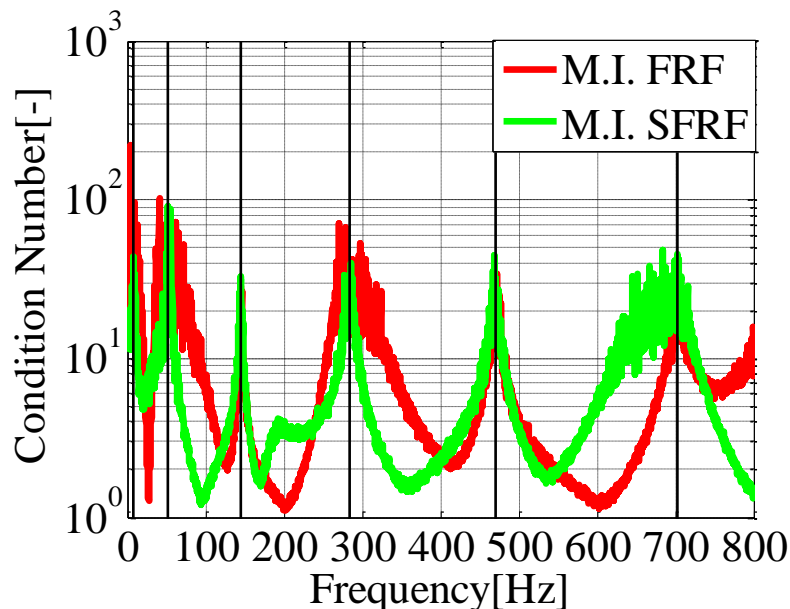


図 4.9 条件数：Case A

#### 4.3.4 同定加振力の分散と信頼係数：Case A

本項では同定加振力の分散及び信頼係数を用いて提案法と従来法を比較する．同定加振力の分散は誤差伝播の評価指標値として用いることができ、値が小さければ同定加振力のバラつきが少なく、誤差伝播が改善されることを示す．また信頼係数は同定加振力の分散から算出することができ、0～1 の範囲で同定結果の信頼性を評価できる指標である．なお本項の結果は f2 の結果を示していく．

まず逆行列法を用いた場合の結果を示す．図 4.10, 図 4.11 にそれぞれ同定加振力の分散、信頼係数を示す．図中の縦の実線は固有振動数を示し、M.I.は逆行列法を示す．図 4.10, 図 4.11 と第 4 章 3 節 2 項を比較すると、分散が大きく、また信頼係数が小さい周波数は同定精度が低下していることが確認できる．これより分散、信頼係数は誤差伝播の評価指標値として用いることができることが確認された．図 4.10, 図 4.11 より 1 次、2 次、4 次の固有振動数付近の周波数において SFRF の方が分散は小さく、また信頼係数も高くなる傾向があることがわかる．しかし 6 次の固有振動数付近において SFRF は FRF よりも分散が大きくまた信頼係数も低下していることがわかる．

次に動質量法を用いた場合の結果を示す．図 4.12, 図 4.13 にそれぞれ同定加振力の分散、信頼係数を示す．図中の縦の実線は固有振動数を示し、A.M.は動質量法を示す．逆行列法同様に、図 4.12, 図 4.13 と第 4 章 3 節 2 項を比較すると、分散が大きく、また信頼係数が小さい周波数は同定精度が低下した．図 4.12 より、FRF, SFRF の分散は逆行列法ほどの違いはないが、SFRF の方がどの周波数においても小さくなる傾向が見られた．図 4.13 より、6 次の固有振動数付近では FRF の方が信頼係数は高くなっているが、それ以外の周波数では SFRF の方が値は大きい．

また逆行列法と動質量法を比較すると、動質量法の方が同定加振力の分散が小さく、また信頼係数の値が大きいことがわかる．

以上より加振点応答を採用した場合、動質量法では従来法、提案法の差はあまりなかったが、逆行列法では周波数によって SFRF の同定加振力の分散や信頼係数は従来法よりも優れた傾向があることが確認された．このことから加振点応答を採用した場合、SFRF を用いた入力同定の方が同定加振力のばらつきは少なく、誤差伝播が改善されていることがわかる．

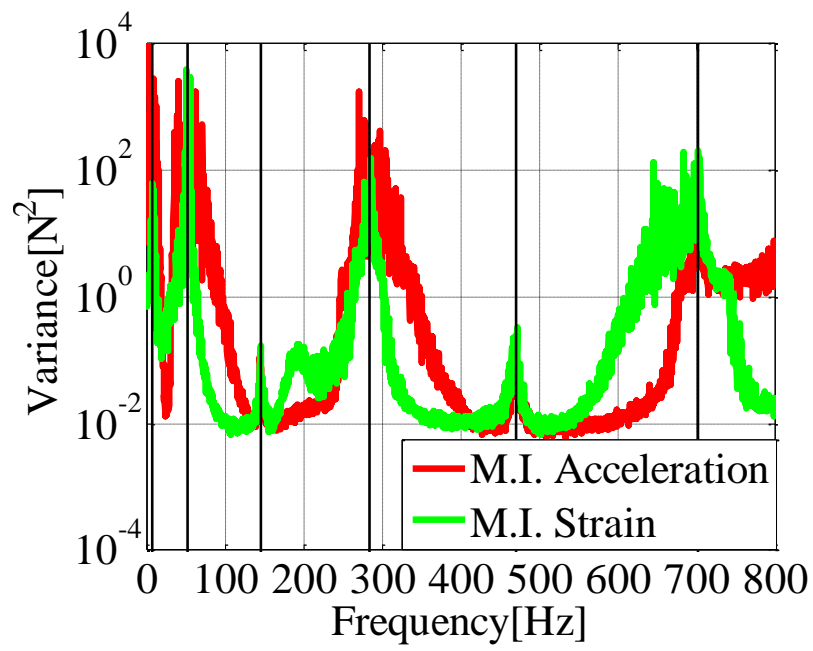


図 4.10 分散(f2, Case A, 逆行列法)

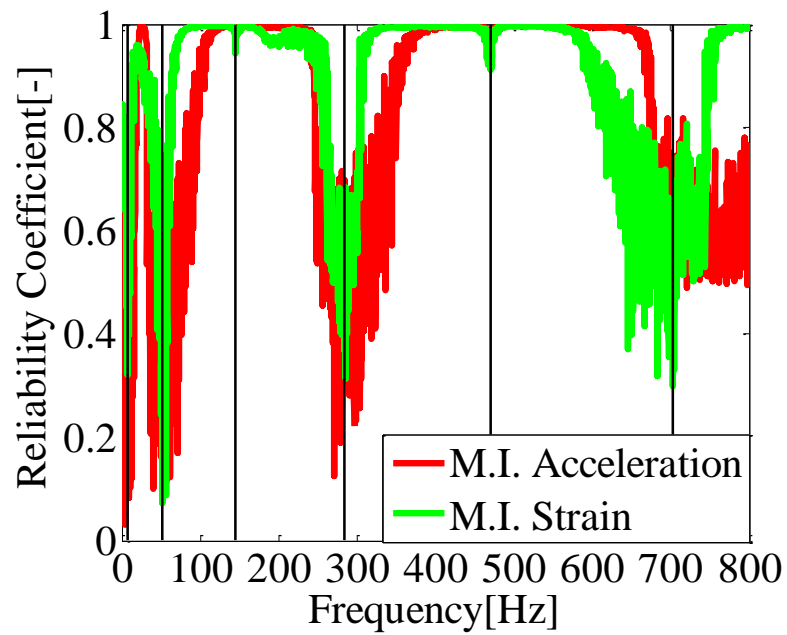


図 4.11 信頼係数(f2, Case A, 逆行列法)

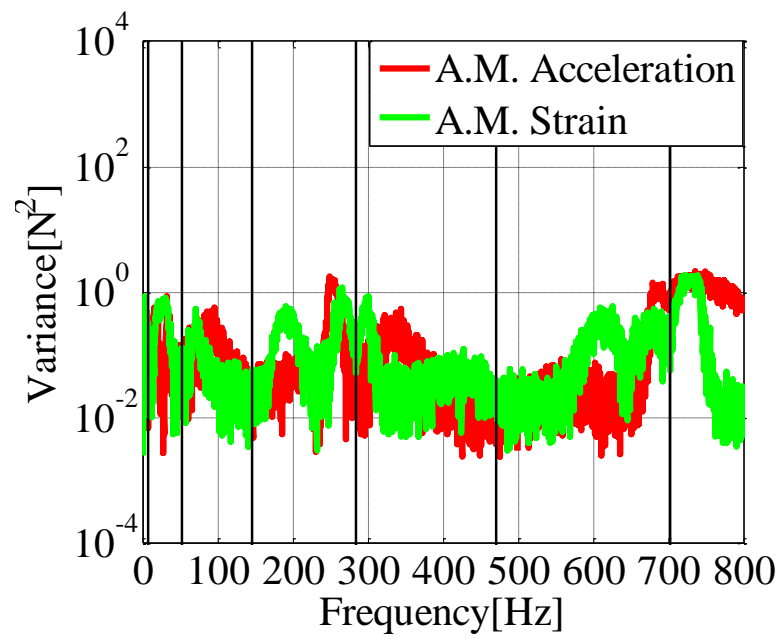


図 4.12 分散(f2, Case A, 動質量法)

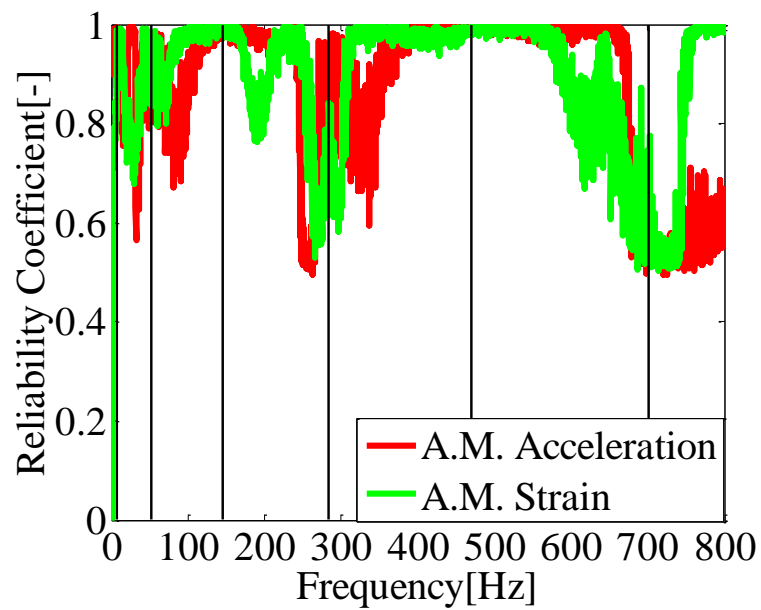


図 4.13 信頼係数(f2, Case A, 動質量法)

#### 4.3.5 入力同定結果：Case B

本項では各応答(Case B)を用いた入力同定によって得られた加振力のパワースペクトルと同定誤差を比較する。パワースペクトルは f2 の結果を示していく。

まず逆行列法を用いた入力同定の結果を示す。図 4.14 に f2 のパワースペクトルを示す。図中の縦の実線は固有振動数を示し、M.I.は逆行列法を示す。また図 4.15 に f1, f2 の周波数平均誤差を示す。図 4.14 より 50~150 Hz 付近において SFRF を用いた入力同定の方が精度は高いことがわかる。しかし 700Hz 付近や 2 次, 4 次, 6 次の固有振動数付近では SFRF の精度が低下している。図 4.15 より SFRF の方が従来法よりも周波数平均誤差が小さくなっており、同定精度が高くなっていることがわかる。以上より SFRF を用いた入力同定は精度が低下する周波数が存在するが、平均すると従来法よりも誤差が小さくなっていることが確認できる。

次に動質量法を用いた入力同定の結果を示す。図 4.16 に f2 のパワースペクトルを示す。図中の縦の実線は固有振動数を示し、A.M.は動質量法を示す。また図 4.17 に周波数平均誤差を示す。図 4.16 より 50~150 Hz 付近, 300Hz 付近において SFRF を用いた入力同定の方が精度は高い。しかし 700Hz 付近では SFRF の方が精度は悪くなっている。図 4.17 より SFRF の方が従来法よりもわずかに周波数平均誤差が小さくなっている。

第4章3節2項の Case A の SFRF と比較すると、逆行列法、動質量法共に Case B の SFRF の方が同定精度は悪くなっていることがわかる。これは Case B の応答点の一つが片持ちはりの先端にあるため、ひずみ量が小さく、SN 比が小さくなったためと考えられる。以上より加振点応答を採用し、SFRF を用いた場合でも、ひずみ量の少ない部分の応答を採用することによって、入力同定精度が低下することがわかった。

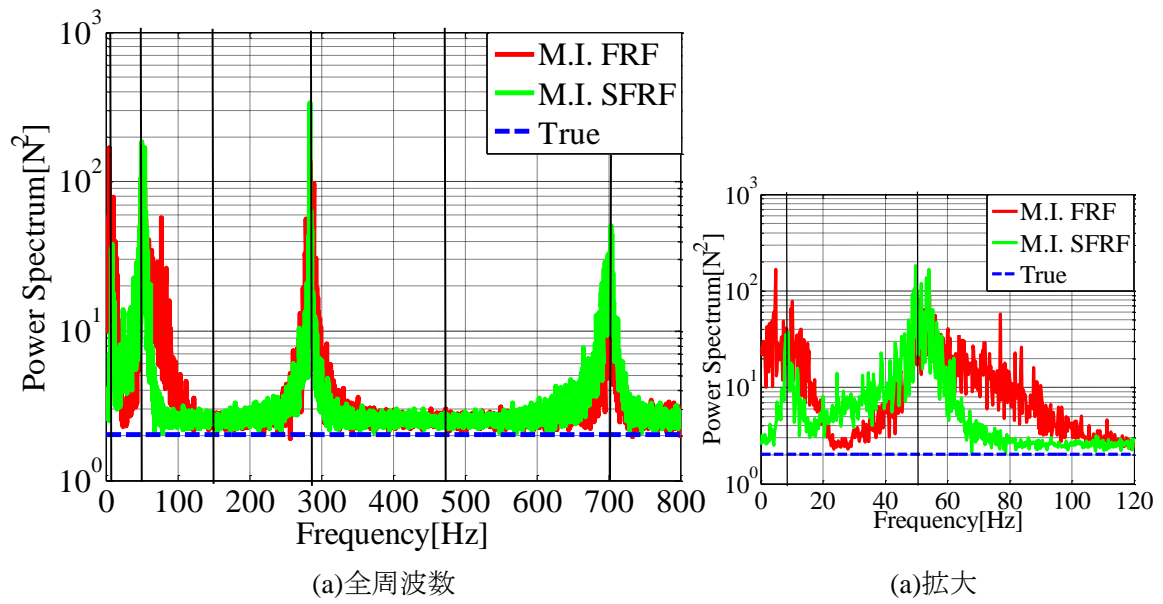


図 4.14 同定加振力のパワースペクトル(f2, Case B, 逆行列法)

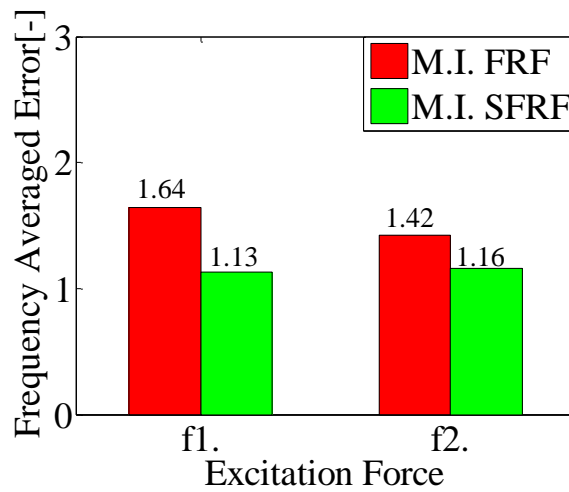


図 4.15 周波数平均誤差(Case B, 逆行列法)

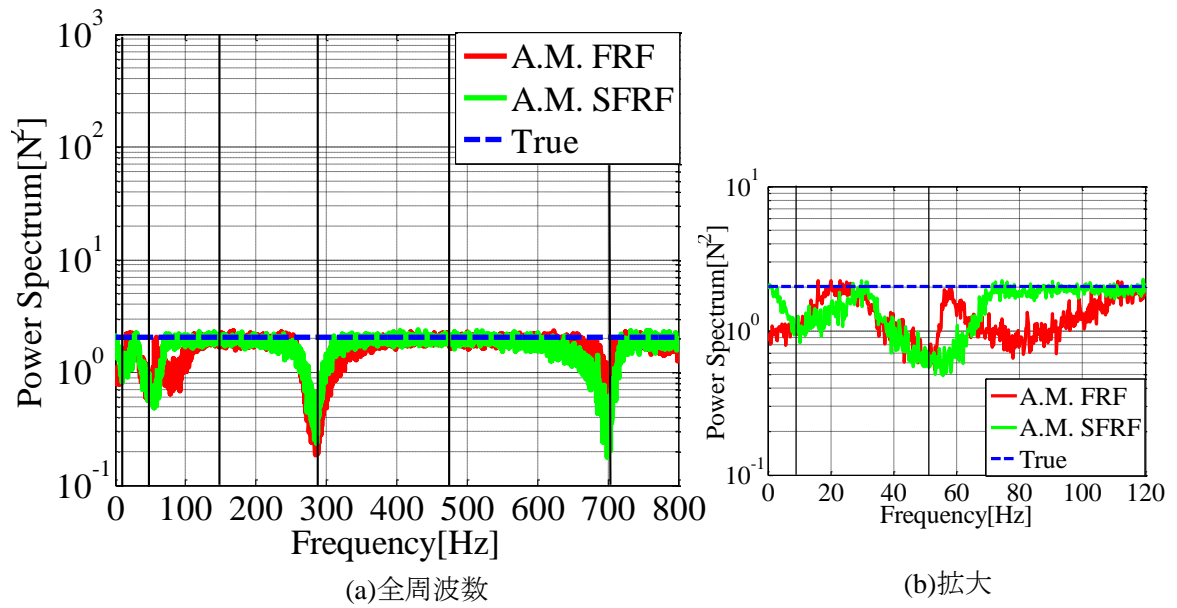


図 4.16 同定加振力のパワースペクトル(f2, Case B, 動質量法)

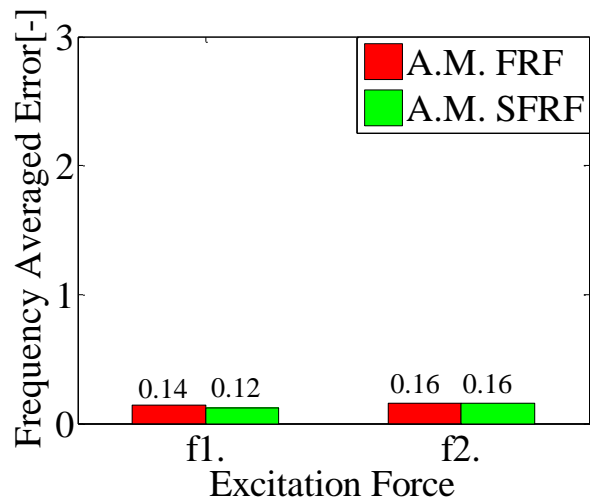


図 4.17 周波数平均誤差(Case B, 動質量法)



#### 4.4 入力同定：加振点応答を採用しない場合

この節では応答計測点に加振点応答を採用せずに，加速度応答のみ，またひずみ応答のみを用いて入力同定を行う場合を考える．入力同定は逆行列法と動質量法を用いて行う．入力同定の評価方法としては，周波数平均誤差，条件数，同定加振力の分散，信頼係数を用いる．

図 4.1 における片持ちはりの加振点と応答点の条件を表 4.3 に示す．この条件はひずみ及び加速度の計測点は加振点応答を含まないものである．

表 4.3 加振点・応答点位置

Response Point[m]				Excitation Point[m]	
				f1	f2
Acceleration				0.5	0.6
0.2	0.3	0.8	0.9		
Strain					
0.2	0.3	0.8	0.9		

#### 4.4.1 入力同定結果

各応答を用いた入力同定によって得られた加振力のパワースペクトルと同定誤差を比較する。本シミュレーションでは  $f1(x=0.5)$ ,  $f2(x=0.6)$  の 2 つの加振力が得られるが、パワースペクトルは  $f2$  の結果を示していく。

まず逆行列法を用いた入力同定の結果を示す。図 4.18 に  $f2$  のパワースペクトルを示す。図中の縦の実線は固有振動数を示し、**M.I.**は逆行列法を示す。また図 4.19 に周波数平均誤差を示す。図 4.18 よりいくつかの固有振動数付近において誤差が大きくなっていることがわかる。パワースペクトルのピークにおいて、**SFRF** を用いた入力同定は従来法より誤差が大きくなっていることがわかる。図 4.19 より **SFRF** の方が従来法よりも周波数平均誤差が大きくなっており、同定精度が低くなっていることがわかる。以上より応答計測点に加振点応答を含まない場合、**SFRF** を用いた入力同定は同定精度が低下する傾向がある。

次に動質量法を用いた入力同定の結果を示す。図 4.20 に  $f2$  のパワースペクトルを示す。図中の縦の実線は固有振動数を示し、**A.M.**は動質量法を示す。また図 4.21 に周波数平均誤差を示す。図 4.20 よりいくつかの固有振動数付近において誤差が大きくなっている。同定精度は  $0 \sim 120\text{Hz}$  では **FRF** の方が高いがそれ以降の周波数では、どちらもほぼ同等の同定精度であることがわかる。しかし図 4.21 より **SFRF** の方が従来法よりも周波数平均誤差が大きくなっており、同定精度が低くなっている。また加振点応答を採用した場合と同様に、逆行列法と比較すると **FRF**, **SFRF** 共に動質量法の方が誤差は小さい。

以上より応答計測点に加振点応答を採用しない場合、逆行列法、動質量法共に **SFRF** を用いた入力同定は **FRF** よりも精度が低くなる傾向があることがわかった。この理由を第 3 章の周波数応答関数の比較結果を踏まえて考察する。入力同定では、使用する周波数応答関数が高次モードの影響を受けていると同定精度が向上するという特徴がある。しかし本節では加振点応答を採用していないため、**SFRF** は **FRF** より高次モードの影響が小さく、また加振点応答以外では **FRF** の方が高次モードの影響を受けやすい傾向がある。さらに本節で設定した応答点は加振点よりも自由端側にあるため、ひずみ量が小さく、**SN** 比が小さい。以上の理由によって、**SFRF** を用いた入力同定精度は **FRF** よりも低下したと考えられる。

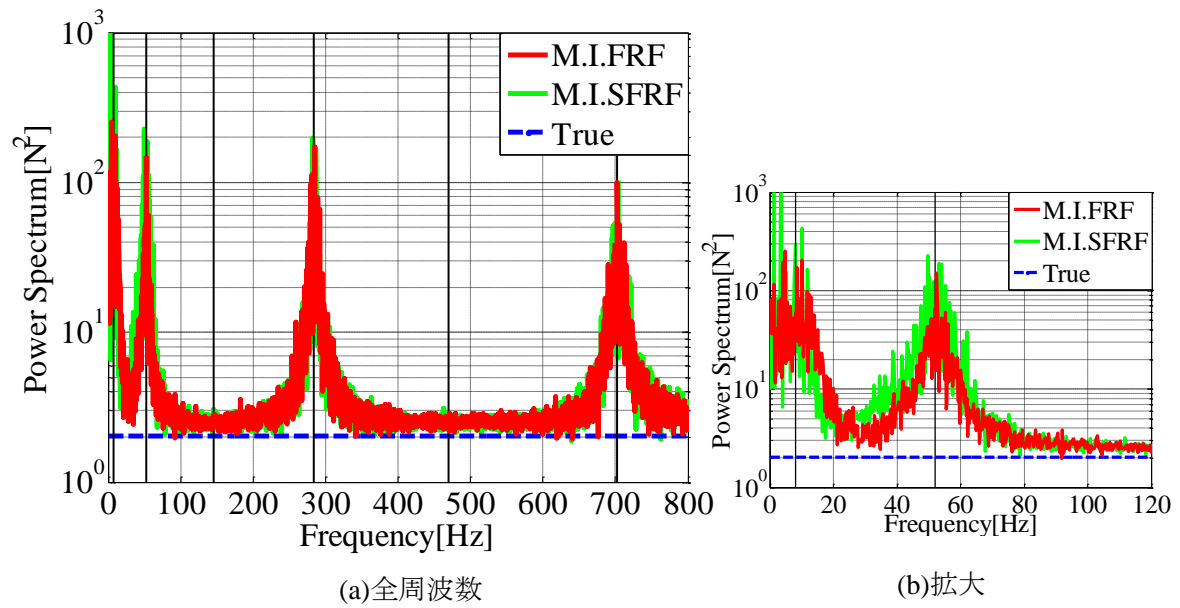


図 4.18 同定加振力のパワースペクトル(f2, 逆行列法)

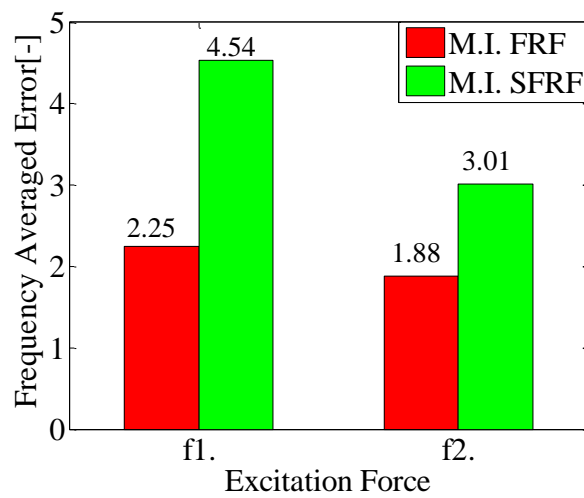
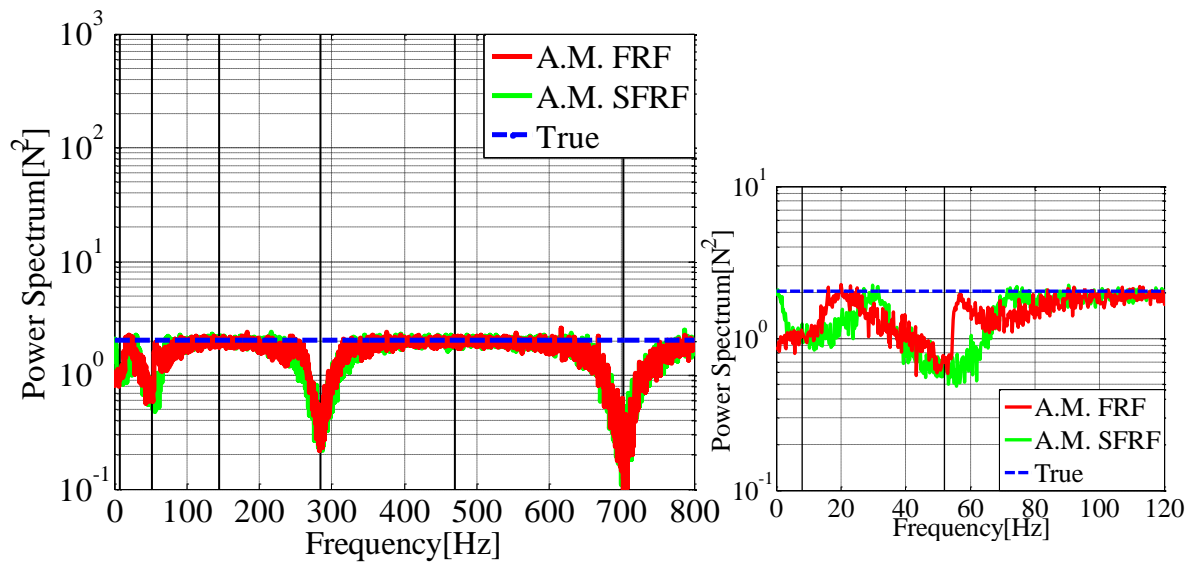


図 4.19 周波数平均誤差(逆行列法)



(a)全周波数

(b)拡大

図 4.20 同定加振力のパワースペクトル(f2, 動質量法)

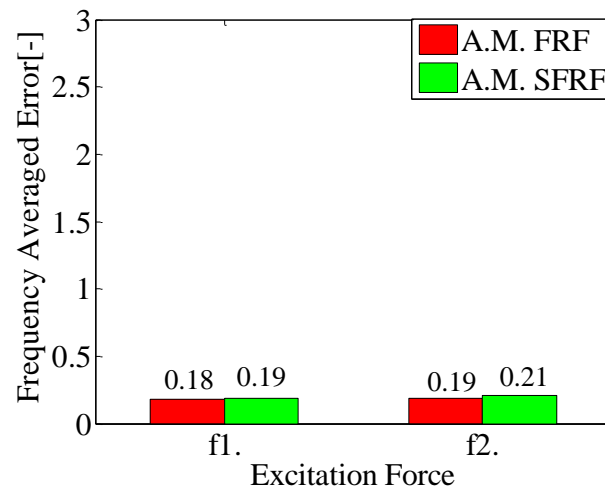


図 4.21 周波数平均誤差(動質量法)

#### 4.4.2 条件数

本項では加振力の誤差伝播を評価する指標である条件数を用いて，FRF，SFRF を比較する．

図 4.22 に逆行列法における FRF と SFRF の条件数を示す．図中の縦の実線は固有振動数を示す．図 4.22 より SFRF と FRF の条件数はほぼ同等であることがわかる．これは計測応答点に加振点応答を採用していないために SFRF は高次モードの影響が小さく，周波数応答関数行列の悪条件が緩和されていないためと考えられる．また FRF，SFRF 共に 3 次，5 次の固有振動数付近の条件数は大きくなっているが，第 4 章 4 節 1 項の図 4.14 では 3 次，5 次の固有振動数付近の同定精度は良好であることがわかる．このことから必ずしも条件数が大きい周波数において入力同定精度が低下するわけではないことがわかる．これは，条件数は誤差の拡大率を表しているのであり，計測データに含まれる誤差を定量評価する指標ではないためである．

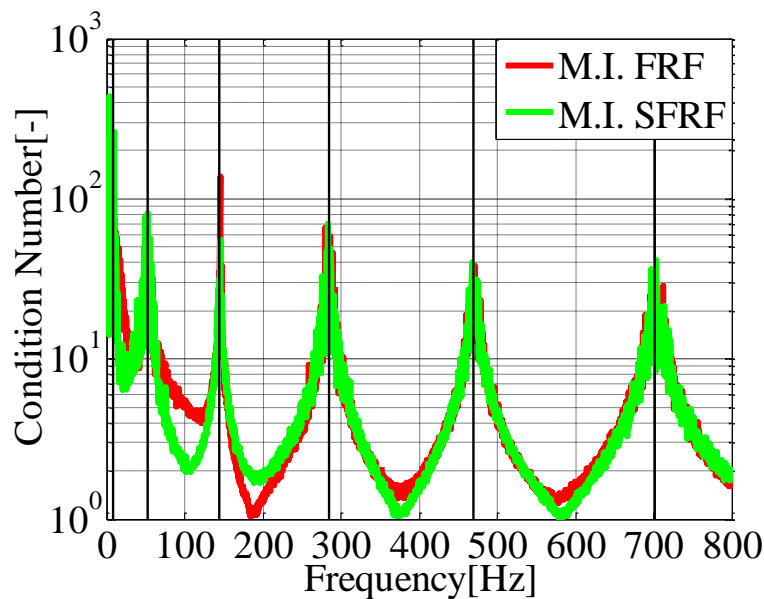


図 4.22 条件数

#### 4.4.3 同定加振力の分散と信頼係数

本項では同定加振力の分散及び信頼係数を用いて提案法と従来法を比較する。なお本項の結果は f2 の結果を示していく。

まず逆行列法を用いた場合の結果を示す。図4.23, 図4.24 にそれぞれ同定加振力の分散, 信頼係数を示す。図中の縦の実線は固有振動数を示し, M.I.は逆行列法を示す。図 4.23, 図 4.24 と第4章4節1項を比較すると, 分散が大きく, 信頼係数が小さい周波数は同定精度が低下している傾向があることがわかる。図4.23 より分散は 100Hz 付近においては SFRF の方が FRF より小さいがそれ以外の周波数では FRF の方が小さいことがわかる, また図 4.24 より信頼係数も FRF の方が大きくなる傾向があることがわかる。

次に動質量法を用いた場合の結果を示す。図4.25, 図4.26 にそれぞれ同定加振力の分散, 信頼係数を示す。図中の縦の実線は固有振動数を示し, A.M.は動質量法を示す。図 4.25, 図 4.26 と第4章4節1項を比較すると, 分散が大きく, 信頼係数が小さい周波数は同定精度が低下している傾向があることがわかる。図 4.25 より, 分散は 100Hz 付近においては SFRF の方が FRF より小さいがそれ以外の周波数では FRF, SFRF どちらもほぼ同等の大きさになった。図 4.26 より, 信頼係数も 100Hz 付近においては SFRF の方が大きくなっているがそれ以外の周波数では FRF, SFRF のどちらもほぼ同等である。

以上より加振点応答を採用しない場合の同定加振力の分散や信頼係数は, 動質量法では従来法, 提案法の差はあまりなかったが, 逆行列法では SFRF は FRF よりも劣った結果を示している。よって加振点応答を採用しない場合, FRF を用いた入力同定の方が同定加振力のばらつきが少ない傾向があることがわかる。

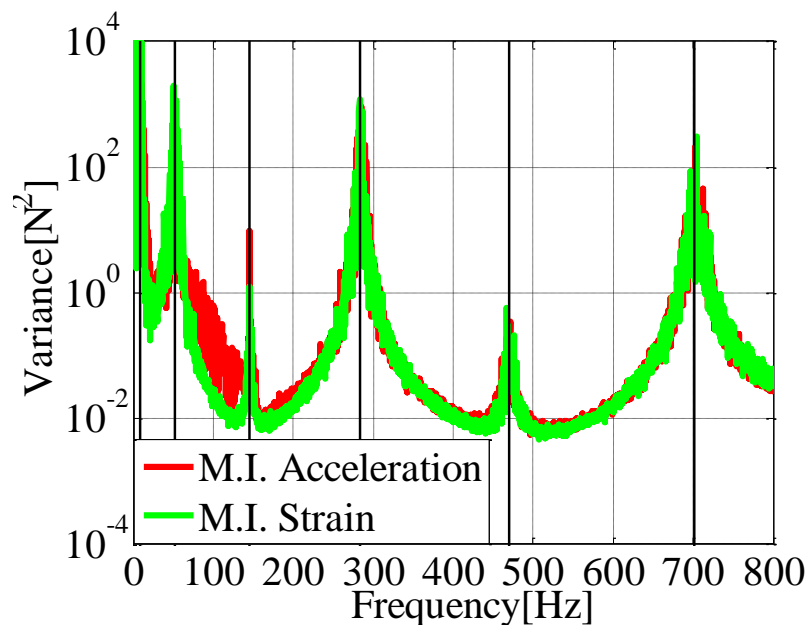


図 4.23 分散(f2, 逆行列法)

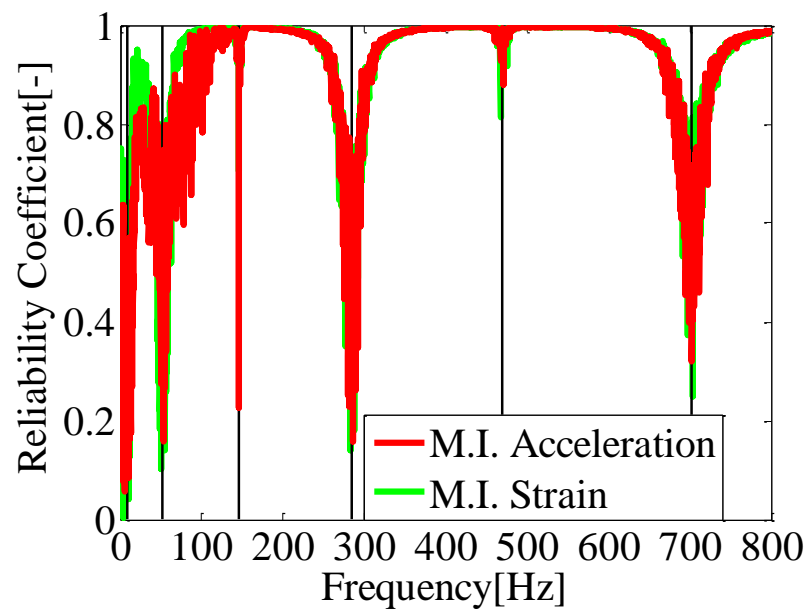


図 4.24 信頼係数(f2, 逆行列法)

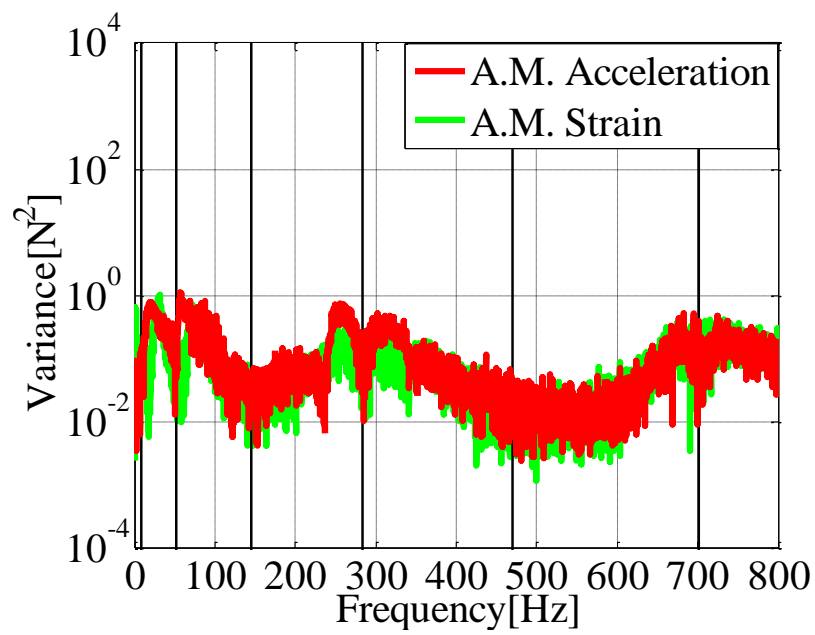


図 4.25 分散(f2, 動質量法)

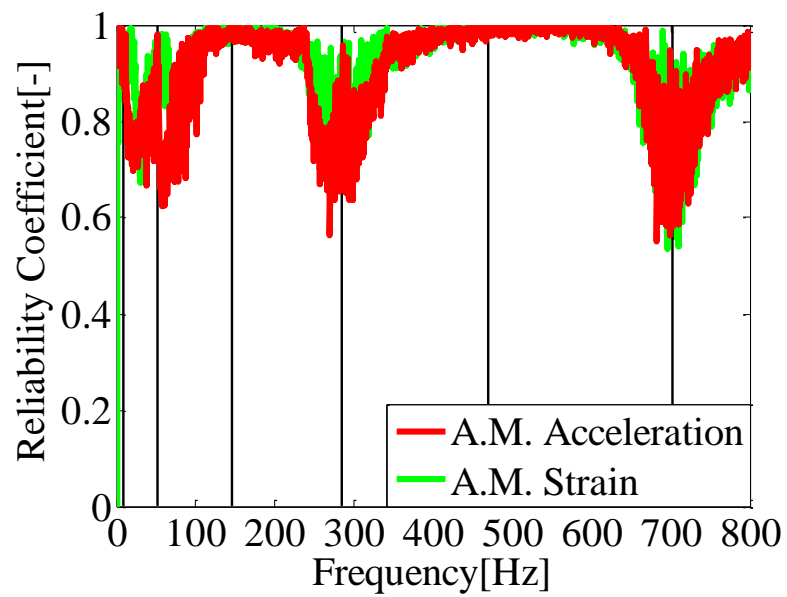


図 4.26 信頼係数(f2, 動質量法)



## 4.5 再合成のシミュレーション

TPA による振動，騒音の寄与分析を行うためには同定した加振力と推定した周波数応答関数から評価点の応答を算出する再合成を行うことが必要になる．TPA では応答の再合成結果に基づいて寄与の大きさを判断するために，再合成の精度も重要になる．

本節ではシミュレーションによって得られた周波数応答関数(FRF, SFRF)と入力同定によって得られた加振力を用いて，応答の再合成を行い，加速度計を用いた手法とひずみ計を用いた手法の精度を比較する．よって再合成する応答量は加速度とひずみとする．なお加振点，応答点の条件は第4章3節の加振点応答を採用した場合のものを使用する．

### 4.5.1 再合成について

応答の再合成の算出は第1章1節に示す，式(1.1)を用いて行う．本節では逆行列法を用いて同定された加振力と同定する際に使用した周波数応答関数を用いて再合成を行う．再合成の評価方法は，第2章4節で述べた相対誤差，周波数平均誤差を用いて行う．ただし相対誤差，周波数平均誤差は  $f^{(k)}(\omega)$  を  $k$  回目の応答の真値のフーリエスペクトル， $\hat{f}^{(k)}(\omega)$  を  $k$  回目に再合成された応答のフーリエスペクトルとして求める．

### 4.5.2 シミュレーションの条件

図4.1における加振点，応答点，評価点位置を表4.4に示す．加振点，応答点の条件は第4章3節のCase Aと同様のものである．

表 4.4 加振点・応答点・評価点位置

Response Point[m]				Excitation Point[m]		Evaluation Point[m]
				f1	f2	
Acceleration				0.5	0.6	0.2
0.1	0.2	0.5	0.6			
Strain						
0.1	0.2	0.5	0.6			

### 4.5.3 再合成の結果

本項では各応答を用いた入力同定によって得られた加振力と各周波数応答関数を用いて再合成を行った結果を示す。なお結果は逆行列法に基づくもののみとする。

図 4.27, 図 4.28 にそれぞれ加速度応答の再合成結果, ひずみ応答の再合成結果を示す。図 4.29 に再合成した各応答の真値に対する相対誤差を示す。図 4.30 に周波数平均誤差を示す。図 4.27 より再合成した加速度応答の結果は概ね良好だが, 50Hz 付近まで誤差が大きいことがわかる。図 4.28 より再合成したひずみ応答は概ね良好な結果を示していることがわかる。図 4.29 より, 0~200Hz ではひずみ応答の方が誤差はかなり小さいことがわかる。250~600Hz では加速度応答の方がわずかに誤差は小さい。また図 4.30 より, 周波数平均誤差はひずみ応答の方が小さいことがわかる。

以上より, 実際の TPA で評価する値である, 再合成値を算出したところ, ひずみ応答を用いた手法は従来法よりも精度が高くなる傾向があることがわかった。

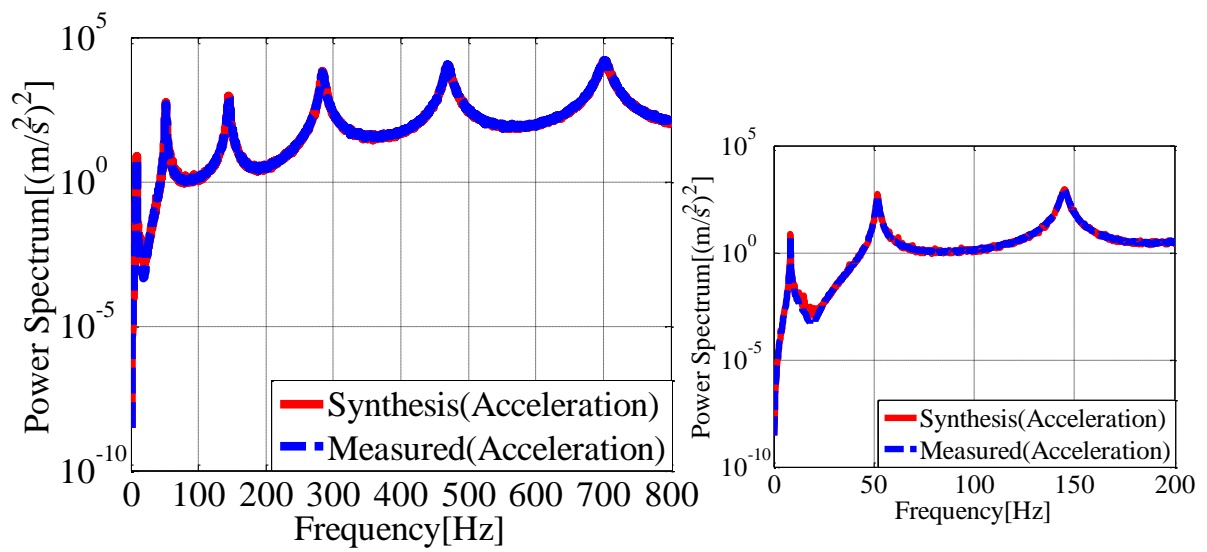


図 4.27 加速度応答の再合成(左：全周波数 右：拡大)

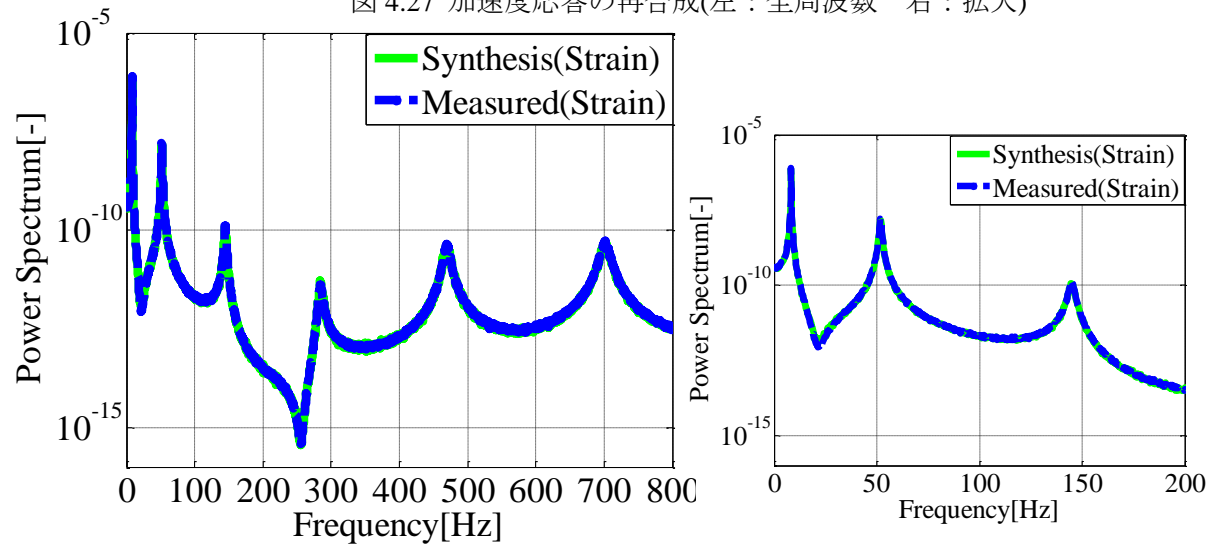


図 4.28 ひずみ応答の再合成(左：全周波数 右：拡大)

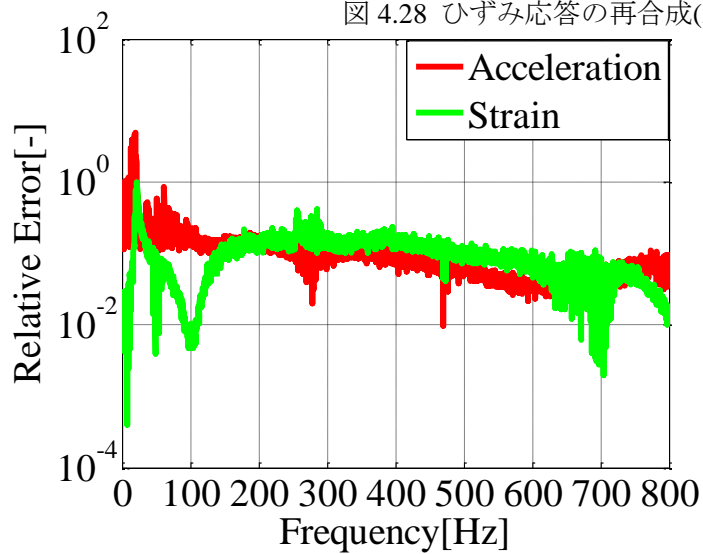


図 4.29 再合成値の相対誤差

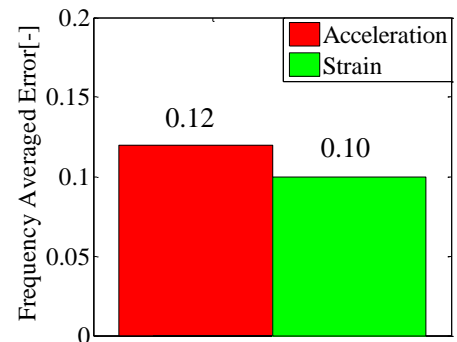


図 4.30 再合成値の周波数平均誤差

#### 4.6 第4章のまとめ

本章ではひずみ応答の有効性を検討するためにシミュレーション上で入力同定を行った。さらに応答計測点に加振点応答を採用した場合と採用しない場合をそれぞれ検討した。

その結果、加振点応答を採用した場合、逆行列法、動質量法共にひずみ応答を用いた入力同定は従来法よりも同定精度が向上した。この理由としては加振点付近のひずみ周波数応答関数は高次モードの影響を強く受けているためと考えられる。また同定加振力の分散や信頼係数より、ひずみ応答を用いた入力同定は誤差伝播の観点からも優れていることが明らかになった。さらに加振点応答を採用した場合でも、ひずみ量の少ない応答点を入力同定に使用すると、入力同定精度が低下することがわかった。

加振点応答を採用しない場合は逆行列法、動質量法共に加速度を用いた入力同定の方がひずみ応答を用いた場合よりも同定精度が優れている傾向があることが確認された。これは、加振点応答以外においてはアクセラランスの方が高次モードの影響を受けやすいため、同定精度が向上したと考えられる。また同定加振力の分散や信頼係数より、加速度を用いた入力同定は誤差伝播の観点からも優れていることがわかった。

また TPA による寄与解析で必要とされる再合成値を算出したところひずみ応答を用いた手法の方が従来法よりも応答の再合成の精度が高いことがわかった。

# 第 5 章

## 入力同定実験

## 5.1 実験概要

本章では実車両を模擬した簡易構造物を用いた加振実験を行い、第 4 章で行った数値シミュレーションによる検討結果が実構造物に対しても成立するかを確認する。また第 4 章の数値シミュレーション同様に得られた加振力と推定した周波数応答関数から、各点の応答を計算する再合成を行い、従来法と提案法の再合成精度の比較を行う。

さらに入力経路を見落とした場合の入力同定を行い、従来法と提案法の比較を行う。

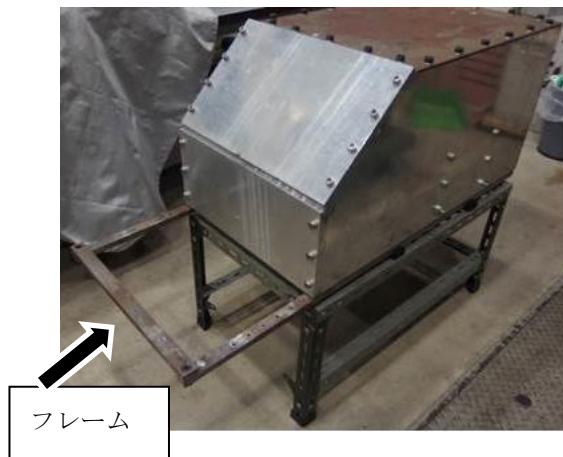
## 5.2 実験方法

### 5.2.1 実験装置

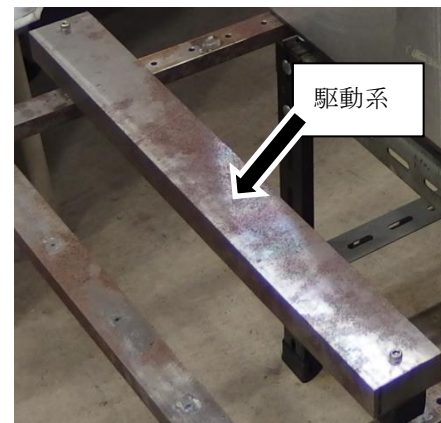
対象とする簡易構造物を図 5.1 に示す。簡易構造物は図 5.1(a)に示す受動系と、図 5.1(b)に示す駆動系(長方形の鋼板)で構成される。図 5.1(c)に受動系に駆動系を設置した状態を示す。簡易構造物はアングル材を組んで作られた台上に、ゴムブッシュを介して設置されている。受動系は簡易構造物の下部にフレームを取り付けたものであり、自動車のボディを模擬したものである。簡易構造物は前面と両側面が厚さ 20mm のジュラルミン製、上面、背面、下面が厚さ 5mm の鋼製である。フレームの前部には駆動系として板厚 25mm の鋼板、さらにその下に加振器が設置され真上に延びたロッドが鋼板に設置されている。フレーム上の 2 点に設置されるロードセルの上に駆動系の鋼板を設置する。この駆動系は、自動車のエンジンを模擬したものである。加振器によって鋼板が加振された時、ロードセルを設置した 2 点の振動伝達経路でフレームへと伝達する力を同定する。ここではロードセルによって計測したデータを真値とする。ロードセルとゴムブッシュからなる振動伝達経路を図 5.2 に示す。

簡易構造物に取り付けた加速度計、ひずみ計を図 5.3 に示す。前部フレーム上のロードセル設置位置(加振点)と応答計測点(加速度応答、ひずみ応答)の位置を図 5.4 に示す。加速度応答及びひずみ応答の計測点は加振点応答を含み、それぞれ 4 点で計測した。ロードセルはフレームにネジで固定し、加速度計は EVA 系接着剤(ホットメルト)を用いて取り付ける。ひずみ計は LOCTITE #454(瞬間接着剤)を用いて取り付ける。なお本実験では入力同定に使用する応答点を①～④の 4 点とした場合(2 点加振 4 点応答)と応答点を③と④の 2 点とした場合(2 点加振 2 点応答)を検討する。実験機器の構成を図 5.5 に示す。

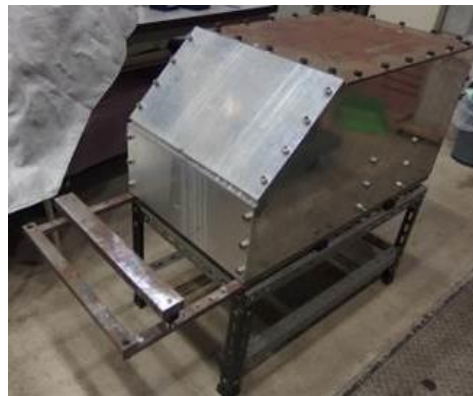
次に、使用した計測器、加振器を表 5.1 に、計測データの信号処理条件を表 5.2 に示す。加振波形はバーストランダム波を用い、計測時間 5 [s] の内、加振時間は 2 [s] とした。周波数応答関数の推定、入力同定におけるスペクトル平均回数はそれぞれ 50 回とした。



(a) 受動系



(b) 駆動系



(c) 受動系+駆動系

図 5.1 簡易構造物

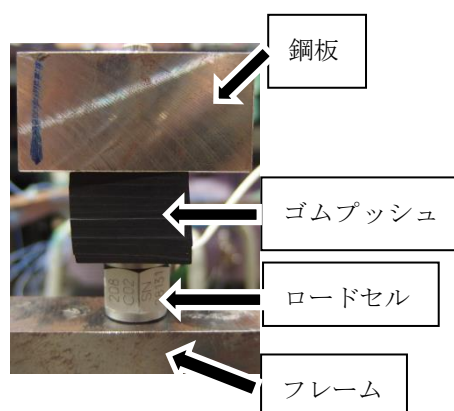


図 5.2 振動伝達経路



(a) 加速度計



(a) ひずみ計

図 5.3 加速度計とひずみ

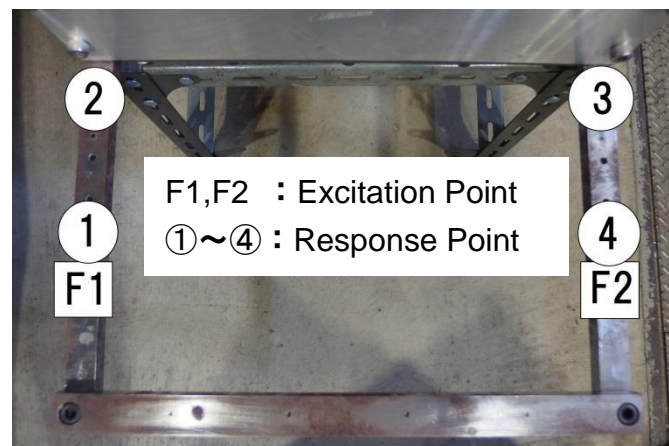


図 5.4 加振点と応答計測点の位置

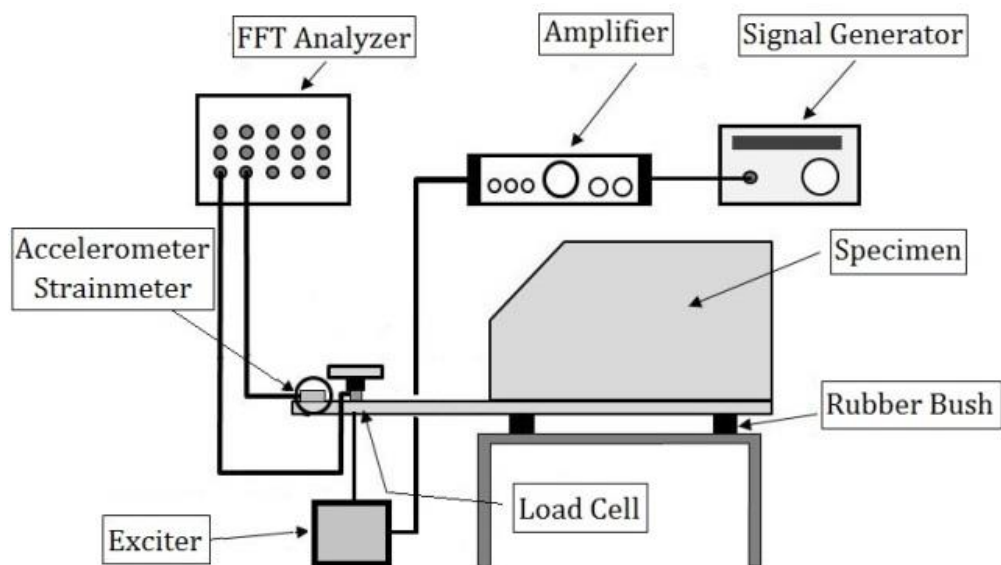


図 5.5 実験機器の構成



表 5.1 計測器・加振器

Signal generator	NF ELECTRONIC INSTRUMENTS, 1360
FFT analyzer	NATIONAL INSTRUMENTS, NI PXI-1042
Vibration measurement system	CAT-SYSTEM
Shaker(1)	Exciter : Wilcoxon Research, F3/Z602WA
	Amplifier : ROTEL, RA-1062
Shaker(2)	Exciter : Labworks, ET-139
	Amplifier : Labworks, PT-138-1
Strain Sensor	PCB, 740B02
Accelerometer	PCB, M352C65
	PCB, M352C66
Load cell	PCB, 208C02

表 5.2 計測データの信号処理

Window function (input force)	Rectangular window
Window function (response)	Rectangular window
Number of sampling points	12800
Sampling time	5[s]
Resolution frequency	0.2[Hz]
Analyzing frequency	1000[Hz]

### 5.2.2 実験手順

簡易構造物を用いた加振実験は以下の手順で行った。

- 1) F1, F2 を加振し，受動系の周波数応答関数(FRF, SFRF)を推定。
- 2) 受動系と駆動系を結合し，鋼板を加振することで実稼働時における応答を計測。
- 3) 周波数応答関数と実稼働時の応答を用いて入力同定。

周波数応答関数推定のための加振では，駆動系を取り外して受動系単体の状態とし，ロードセルの上に小型の電磁加振器（Shaker(1)）を設置して加振を行う。2 点のロードセル設置位置(F1, F2)を 1 点ずつ加振し，各加振点と各応答計測点間の FRF を推定するためのデータを計測する。

実稼働加振では駆動系を設置し，Shaker(2)により，鋼板をロードで加振し各応答点で応答を計測する。

### 5.3 入力同定：加速度応答とひずみ応答の比較(2 点加振 4 点応答の場合)

本節では図 5.6 に示す①～④の応答点を入力同定に使用し，加速度応答，ひずみ応答をそれぞれ用いた場合の同定結果を比較する。入力同定は逆行列法と動質量法を用いて行う。入力同定の評価方法としては，周波数平均誤差，条件数，同定加振力の分散，信頼係数を用いる。入力同定結果の対象周波数は 25～450Hz とする。

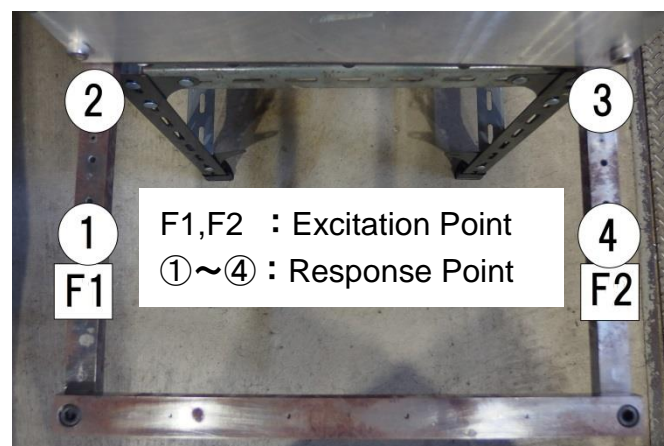


図 5.6 応答点位置

### 5.3.1 周波数応答関数推定

本項では入力 F1, 応答①のコヒーレンス関数と推定された周波数応答関数を示す. 図 5.7, 図 5.8 にそれぞれ FRF, SFRF のコヒーレンス関数を示す. また図 5.9, 図 5.10 にそれぞれ推定された FRF, SFRF を示す.

図 5.7, 図 5.8 よりどちらもほぼ 1 に近い値のため, 計測データが良好であることがわかる. また SFRF の方がコヒーレンス関数の低下が少なく FRF よりも誤差が含まれていないことがわかる.

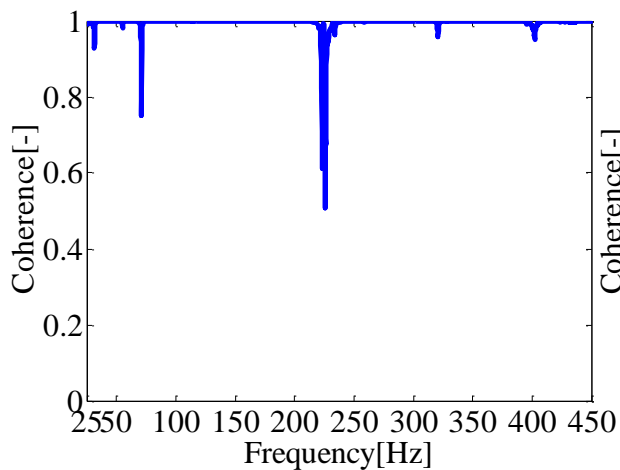


図 5.7 FRF のコヒーレンス関数  
(入力 F1, 応答①)

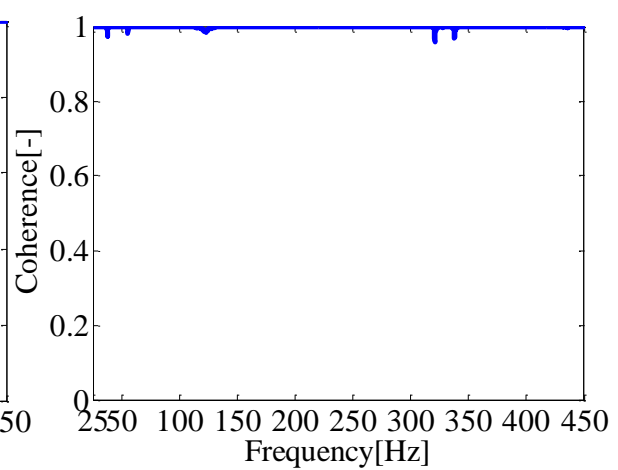


図 5.8 SFRF のコヒーレンス関数  
(入力 F1, 応答①)

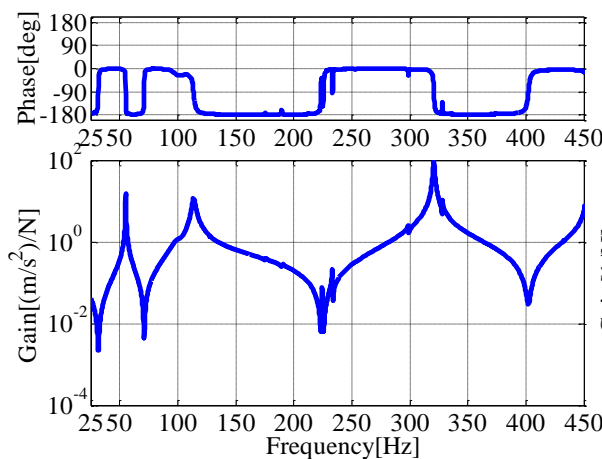


図 5.9 FRF(入力 F1, 応答①)

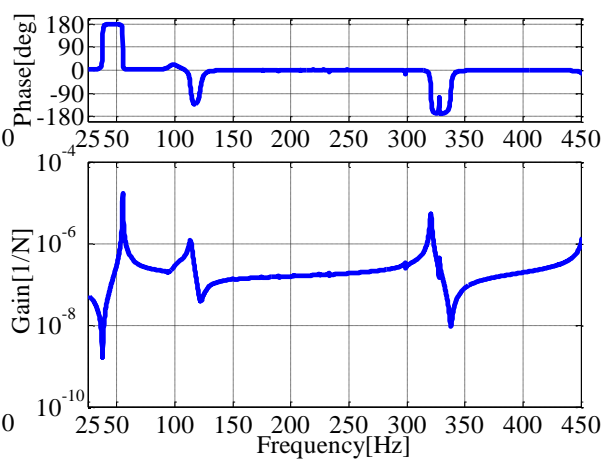


図 5.10 SFRF(入力 F1, 応答①)

### 5.3.2 入力同定結果

本項では各応答を用いた入力同定によって得られた加振力のパワースペクトルと同定誤差を比較する。本実験では F1, F2 の 2 つの加振力が得られるが、パワースペクトルは F2 の結果を示していく。

まず逆行列法を用いた入力同定の結果を示す。図 5.11 に F2 のパワースペクトルを示す。図中の縦線は受動系の固有振動数(前部フレーム主体のモード時の固有振動数)を示し、M.I. は逆行列法を示す。また図 5.12 に周波数平均誤差を示す。図 5.11 より SFRF の方が固有振動数付近における同定精度が高いことがわかる。また 200Hz 付近のピークや 400~450Hz において SFRF の同定精度が高いことがわかる。一方、高周波数におけるピーク付近では FRF, SFRF どちらも精度が悪く、ほぼ同等の同定精度であることがわかる。図 5.12 より同定結果の周波数平均誤差は F2 だけでなく F1 も SFRF の方が小さく、平均しても SFRF を用いた入力同定は精度が高いことがわかる。

続いて動質量法を用いた入力同定の結果を示す。図 5.13 に F2 のパワースペクトルを示す。図中の縦線は受動系の固有振動数(前部フレーム主体のモード時の固有振動数)を示し、A.M.は動質量法を示す。また図 5.14 に周波数平均誤差を示す。図 5.13 より固有振動数付近においては SFRF の方が同定精度は高い。また 200Hz 付近のピークとその周辺、さらには 400~450Hz において SFRF は同定精度が高い。しかし 350~400Hz では FRF を用いた入力同定の方が精度は高い。一方、逆行列法と同様に高周波数におけるピーク付近では FRF, SFRF どちらも精度が悪く、ほぼ同等の同定精度である。図 14 より同定結果の周波数平均誤差は F2 だけでなく F1 も SFRF の方が小さく、SFRF を用いた入力同定は精度が高い。また逆行列法と比較すると、固有振動数付近においては動質量法の方が精度は高くなる傾向が見られた。これは動質量法が加振力を同定するときに逆行列を用いた計算を避けていること、また動質量法は入力加振力の誤差が最小となるよう推定していることが理由と考えられる。

以上より逆行列法、動質量法共に SFRF を用いた方が入力同定精度は高くなる傾向があることがわかった。この理由は第 4 章で述べたものと同様である。入力同定では、固有振動数近傍においてその固有モードが支配的になるため、周波数応答関数行列は悪条件になる。この周波数領域において、高次モードの影響を少しでも受けることによって、応答は加振点ごとに異なる振動形状を示し、周波数応答関数行列の悪条件が緩和されると考えられる。実際に実験において、受動系の固有振動数付近の同定精度は SFRF の方が高くなっており、これは SFRF が高次モードの影響を受け、悪条件が緩和されているためと考えられる。以上が加振点応答において SFRF を採用することにより入力同定精度が向上した理由と考えられる。さらに高周波数においては FRF, SFRF どちらもほぼ同じ同定精度になった。これは高周波数ではモード密度やモード減衰比が高くなり、固有モード間の連成が強くなることで、FRF と SFRF のどちらも他モードの影響が同程度になったためと考えられる。よって SFRF を用いた入力同定は低周波域において有効であることがわかる。

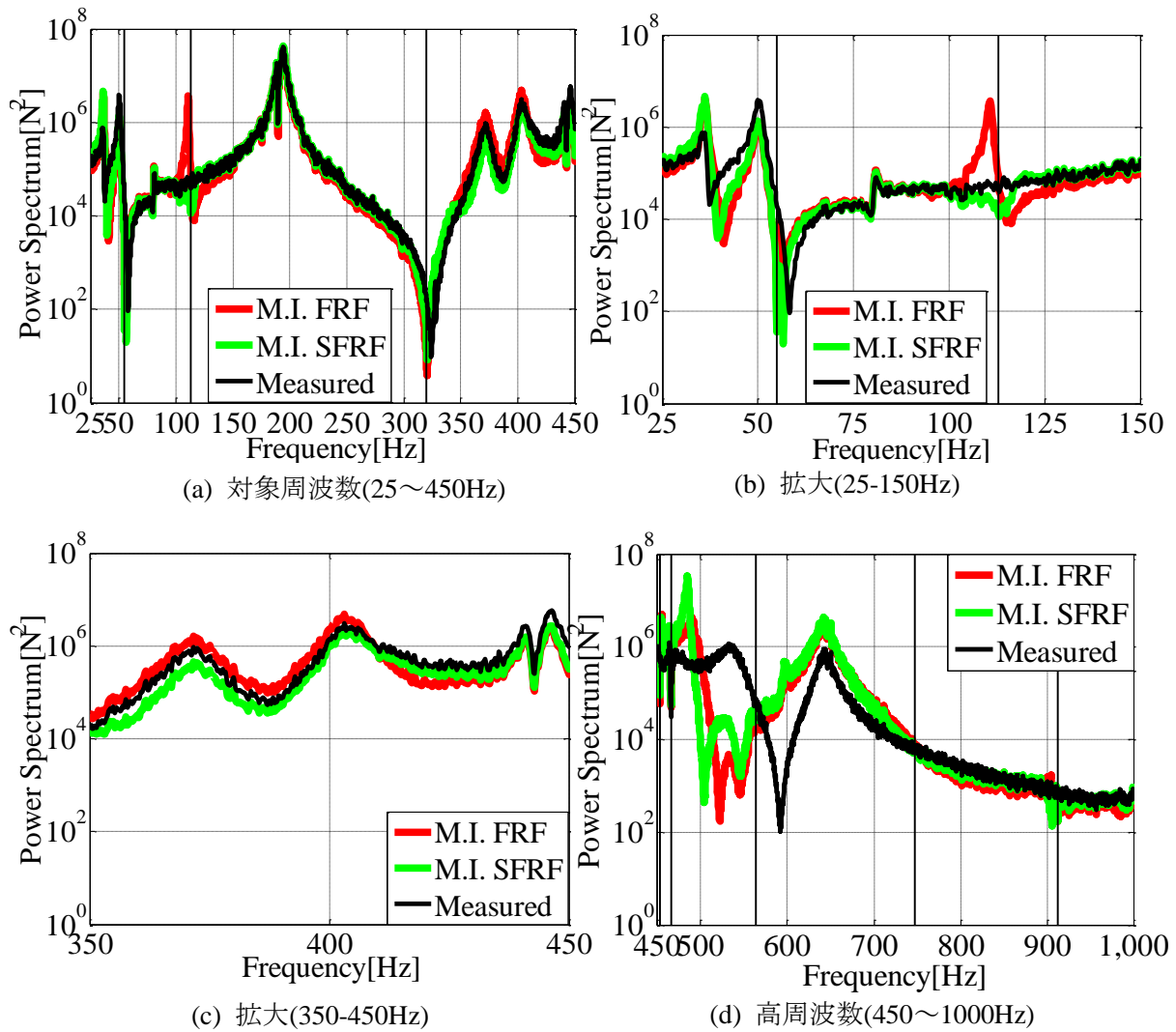


図 5.11 同定加振力のパワースペクトル(F2, 逆行列法)

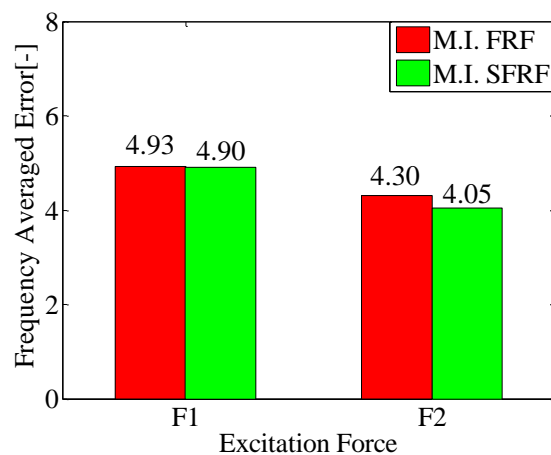


図 5.12 周波数平均誤差(逆行列法, 25~450Hz)

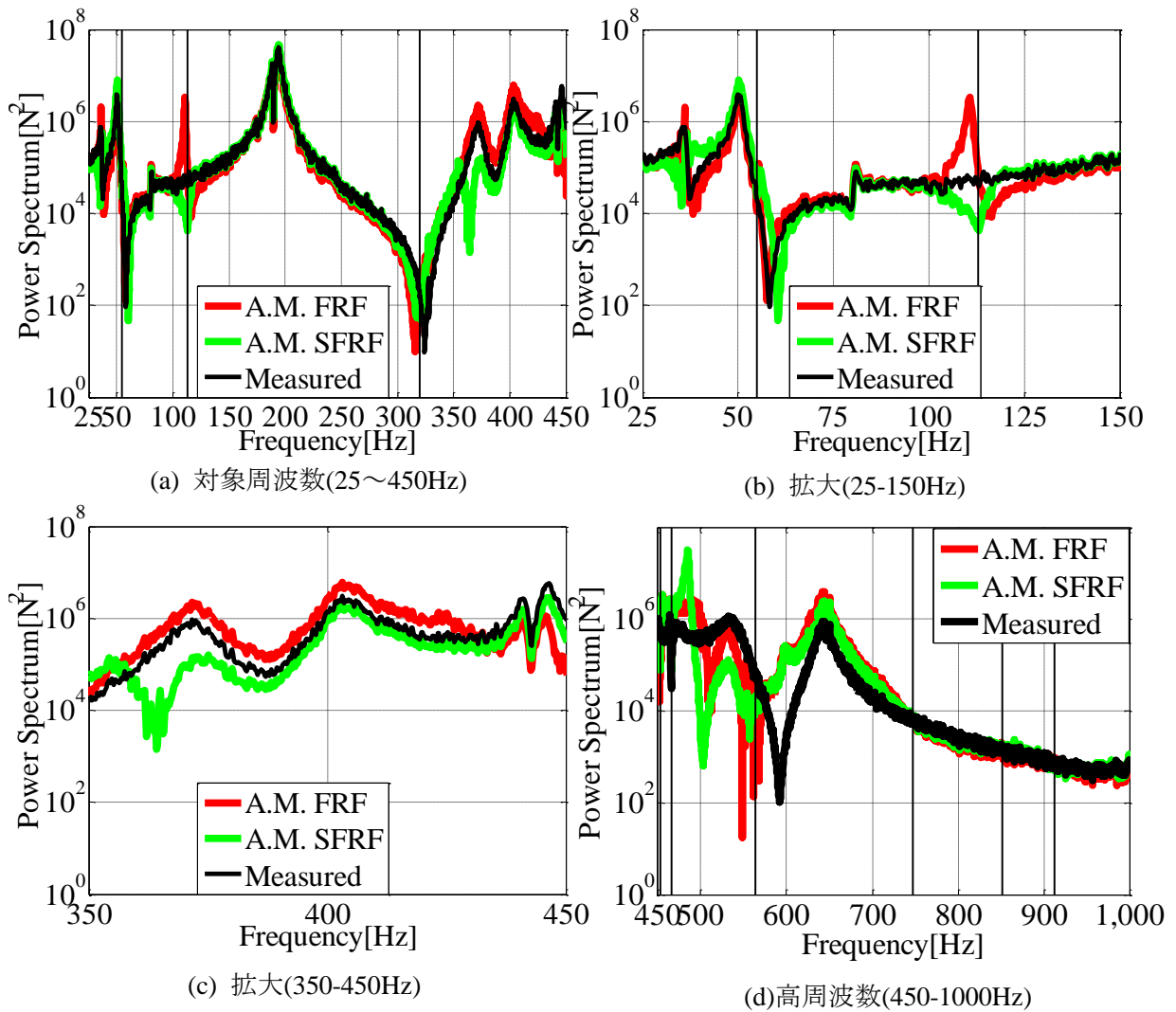


図 5.13 同定加振力のパワースペクトル(F2, 動質量法)

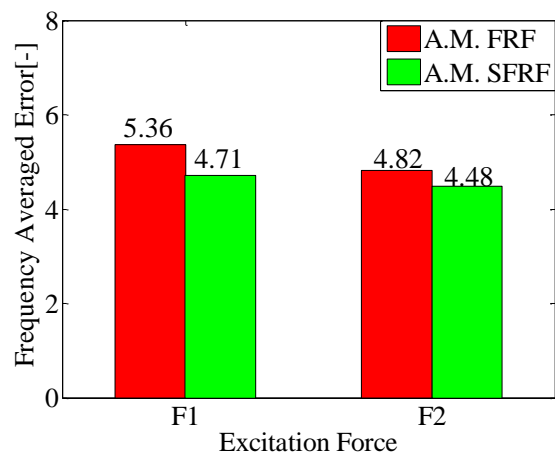


図 5.14 周波数平均誤差(動質量法, 25~450Hz)

### 5.3.3 条件数

本項では加振力の誤差伝播を評価する指標である条件数を用いて，FRF，SFRF を比較する．条件数は誤差伝播が大きい周波数において値が大きくなるものである．

図 5.15 に逆行列法における FRF と SFRF の条件数を示す．図中の縦の実線は固有振動数(前部フレーム主体のモード時の固有振動数)を示す．

図 5.15 より固有振動数において条件数が大きくなっていることがわかる．これは第 4 章のシミュレーションと同様に，固有振動数近傍においては 1 つのモードが支配的になるために，周波数応答関数のランクが 1 に近い状態，つまり悪条件になっているためと考えられる．FRF と SFRF を比較すると SFRF の方がどの周波数においても条件数が小さいことがわかる．これは SFRF が FRF より高次モードの影響が大きく，周波数応答関数行列の悪条件が緩和されているためと考えられる．

図 5.11 と図 5.15 を比較すると，第 4 章のシミュレーションと同様に必ずしも条件数が高い周波数において入力同定精度が低下するわけではないことがわかる．この理由としては，条件数は誤差が拡大される上限値を表しているのであり，計測データに含まれる誤差を統計的に評価する指標ではないためである．

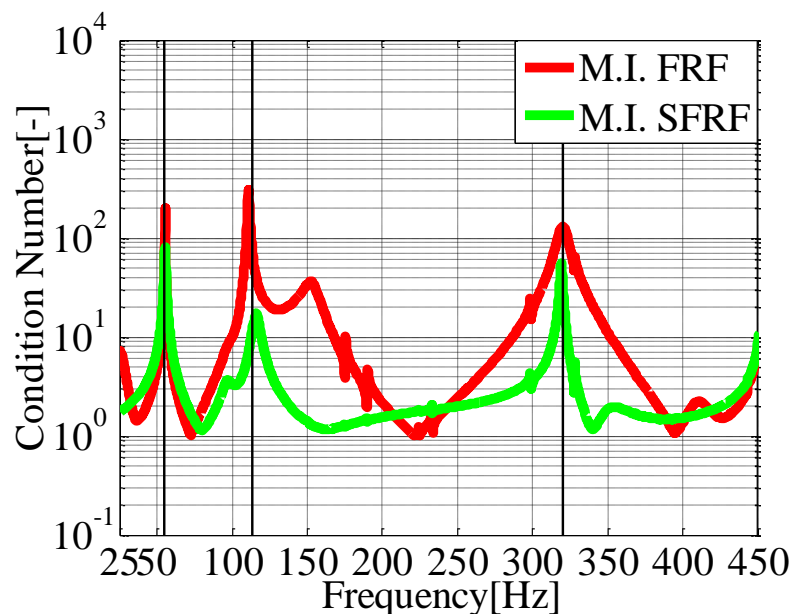


図 5.15 条件数(対象周波数)

#### 5.3.4 同定加振力の分散と信頼係数

本項では同定加振力の分散及び信頼係数を用いて提案法と従来法を比較する。同定加振力の分散は誤差伝播の評価指標値として用いることができ、値が小さければ同定加振力のバラつきが少なく、誤差伝播が改善されることを示す。また信頼係数は同定加振力の分散から算出することができ、0～1の範囲で同定結果の信頼性を評価できる指標である。なお本項の結果はF2の結果を示していく。

まず逆行列法を用いた場合の結果を示す。図5.16, 図5.17にそれぞれ同定加振力の分散, 信頼係数を示す。図中の縦の実線は固有振動数を示し、M.I.は逆行列法を示す。図5.16, 図5.17と第5章3節2項を比較すると、分散が大きく、また信頼係数が小さい周波数は同定精度が低下していることが確認できる。これより分散, 信頼係数は誤差伝播の評価指標値として用いることができることが確認できる。図5.16, 図5.17より固有振動数だけでなく、どの周波数においてもSFRFの方が分散は小さく、また信頼係数も高くなり、誤差伝播が改善される傾向があることがわかる。

次に動質量法を用いた場合の結果を示す。図5.18, 図5.19にそれぞれ同定加振力の分散, 信頼係数を示す。図中の縦の実線は固有振動数を示し、A.M.は動質量法を示す。

逆行列法同様に、図5.18, 図5.19と第5章3節2項を比較すると、分散が大きく、また信頼係数が小さい周波数は同定精度が低下している。図5.18, 図5.19よりどの周波数においてもSFRFの方が分散は小さく、また信頼係数も高くなる傾向がある。

以上より逆行列法、動質量法共にひずみ応答を用いた手法の同定加振力の分散や信頼係数は従来法よりも優れた結果を示しており、このことからひずみ応答を用いた手法の方が同定加振力のばらつきは少なく、誤差伝播が改善されていることがわかる。

また第4章の数値シミュレーションと比較すると本節のひずみ応答を用いた手法の分散, 信頼係数の方が良好な結果を示した。これは以下の理由が考えられる。同定加振力の分散を誤差評価に用いる場合は、加振力の真値が同定加振力の同定加振力の平均に一致すると仮定しており、固有振動数付近では同定加振力の平均は加振力の真値にならない。また実構造物における実験では測定データの誤差が厳密には正規分布に従っていない。以上の理由により、実験の方が数値シミュレーションよりもひずみ応答を用いた入力同定の分散, 信頼係数の方が良好な結果を示したと考えられる。



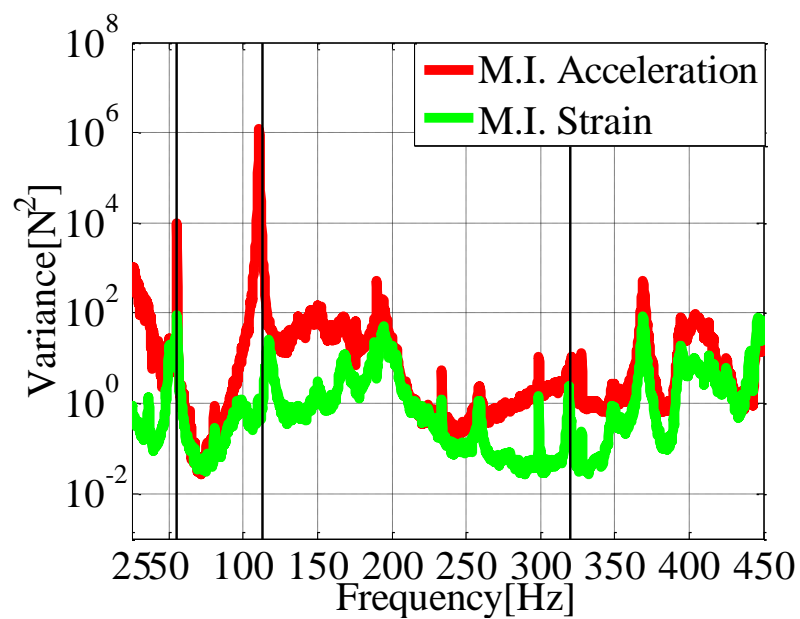


図 5.16 分散(F2, 逆行列法, 対象周波数)

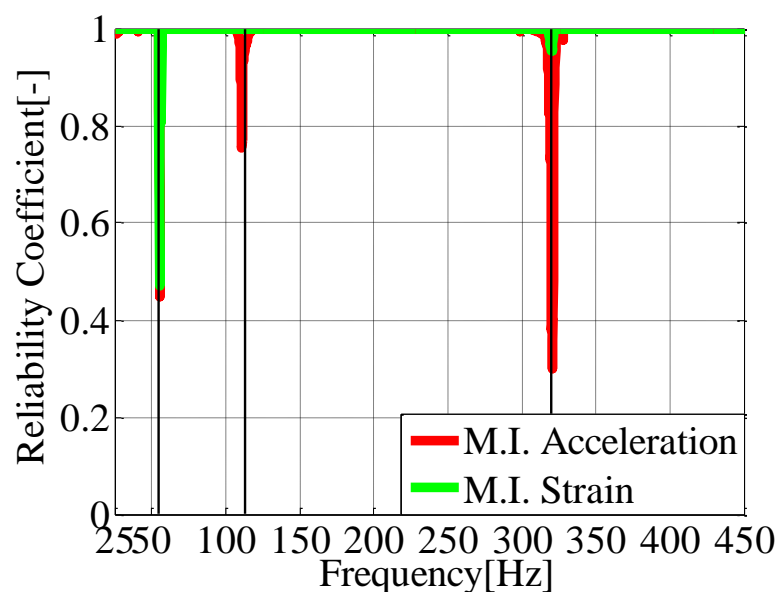


図 5.17 信頼係数(F2, 逆行列法, 対象周波数)

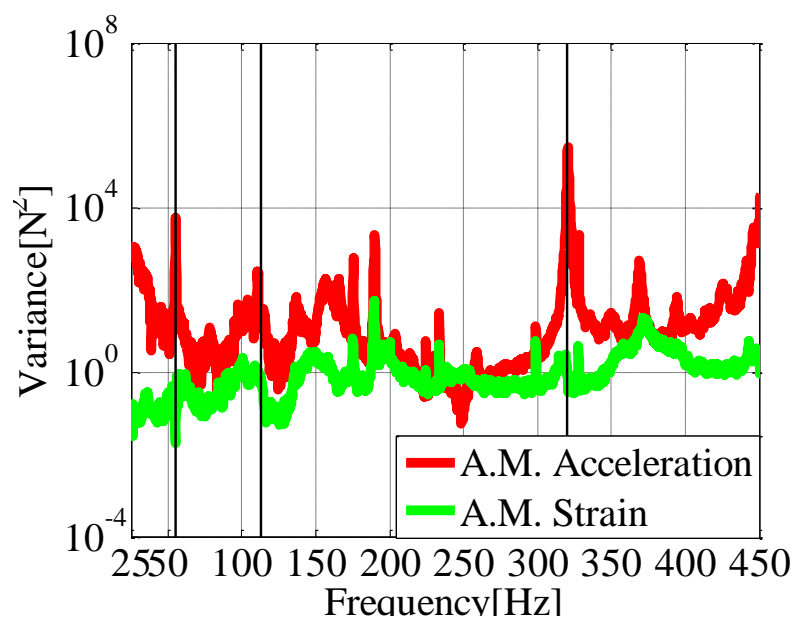


図 5.18 分散(F2, 動質量法, 対象周波数)

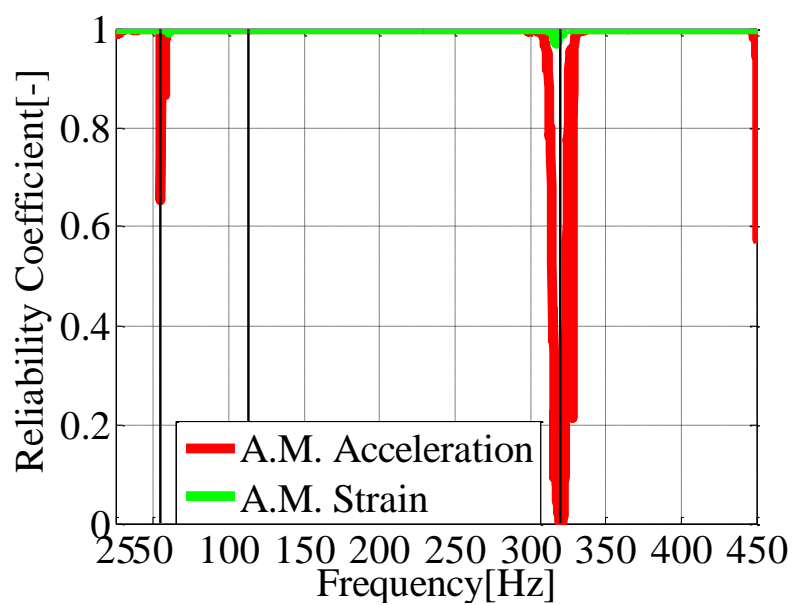


図 5.19 信頼係数(F2, 動質量法, 対象周波数)

#### 5.4 入力同定：加速度応答とひずみ応答の比較(2点加振2点応答の場合)

実際の機械構造物ではスペースの関係上、応答を測定するセンサーの数が制限される場合が想定される。そこで本節では加速度計、ひずみ計の数を減らして、入力同定を行う。

本節では図 5.20 に示す③～④の応答点を入力同定に使用し、加速度応答、ひずみ応答をそれぞれ用いた場合の同定結果を比較する。入力同定の評価方法としては、周波数平均誤差、同定加振力の分散、信頼係数を用いる。第5章3節同様に結果の対象周波数は25～450Hzとする。なお本節では比較を容易にするため、逆行列法のための結果を示していく。

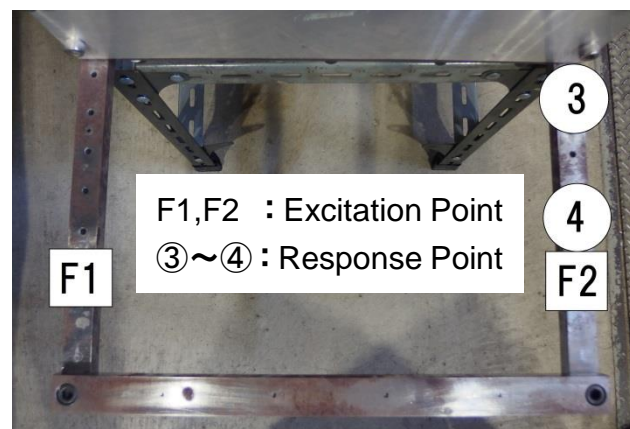


図 5.20 応答点位置

### 5.4.1 入力同定結果

各応答を用いた入力同定によって得られた加振力のパワースペクトルと同定誤差を比較する。なお本項では逆行列法を用いた場合の結果のみを示す。

図 5.21 に F2 のパワースペクトルを示す。図中の縦線は受動系の固有振動数(前部フレーム主体モードの固有振動数)を示す。また図 5.22 に周波数平均誤差を示す。図 5.21 より SFRF の方が受動系の固有振動数付近や 200Hz 付近のピークにおいて SFRF の同定精度が高いことがわかる。特に 100Hz までの周波数において SFRF は高い同定精度であることがわかる。また高周波では 450~650Hz において SFRF の方が同定精度は低下しているがそれ以降の周波数では SFRF の方が精度は良好なことがわかる。図 5.22 より F1 の周波数平均誤差は SFRF の方が FRF よりわずかに小さくなっているだけだが、F2 の周波数平均誤差は SFRF の方が小さくなっていることがわかる。

続いて第5章3節の4点応答の SFRF の入力同定結果と本項の2点応答の SFRF の入力同定結果を比較する。図 5.23 に F2 のパワースペクトルを示す。図中の縦線は受動系の固有振動数(前部フレーム主体モードの固有振動数)を示す。また図 5.24 に周波数平均誤差を示し、参考として F1 のパワースペクトルも示す。図 5.23 より2点応答の方が受動系の固有振動数付近や 100Hz までの周波数において高い同定精度であることがわかる。また高周波数においては 600Hz まではどちらの応答点数においても同定精度が低下しているが、600Hz 以降の周波数域では2点応答の方が精度は高いことがわかる。図 5.24 より F1 の周波数平均誤差は4点応答の方が2点応答より小さくなっている。実際にパワースペクトルより、25~50Hz, 300~450Hz において4点応答の方が精度は良いことがわかる。しかし、F2 の周波数平均誤差は2点応答の方が小さくなっていることがわかる。

以上より従来法と比較してひずみ計は少ない応答点数でも精度の高い入力同定が可能であることがわかる。また SFRF を用いた F2 の入力同定は2点応答の方が4点応答よりも同定精度が向上した。この理由を以下に考察する。ひずみ応答は加振点付近において高次モードの影響を強く受けることを第3章で述べた。4点応答の場合では対象とする加振力である F2 付近以外の応答も用いており、高次モードの影響が小さい SFRF も使用して入力同定を行っている。一方で2点応答の場合は対象とする加振力である F2 の付近の応答のみを用いており、F2 の寄与が大きい SFRF、つまり高次モードの影響が大きい SFRF のみを使用して入力同定を行っている。そのため、4点応答よりも同定精度が上昇したと考えられる。実際に受動系の固有振動数付近の同定精度は2点応答の方が高くなっており、これは高次モードの影響が大きい SFRF のみを使用したことで、入力同定に用いる周波数応答関数の悪条件がより緩和されたためと考えられる。

よって入力同定においてひずみ計を使用する場合、対象とする加振点付近のひずみ応答のみを使用することで精度の高い入力同定が可能であると考えられる。

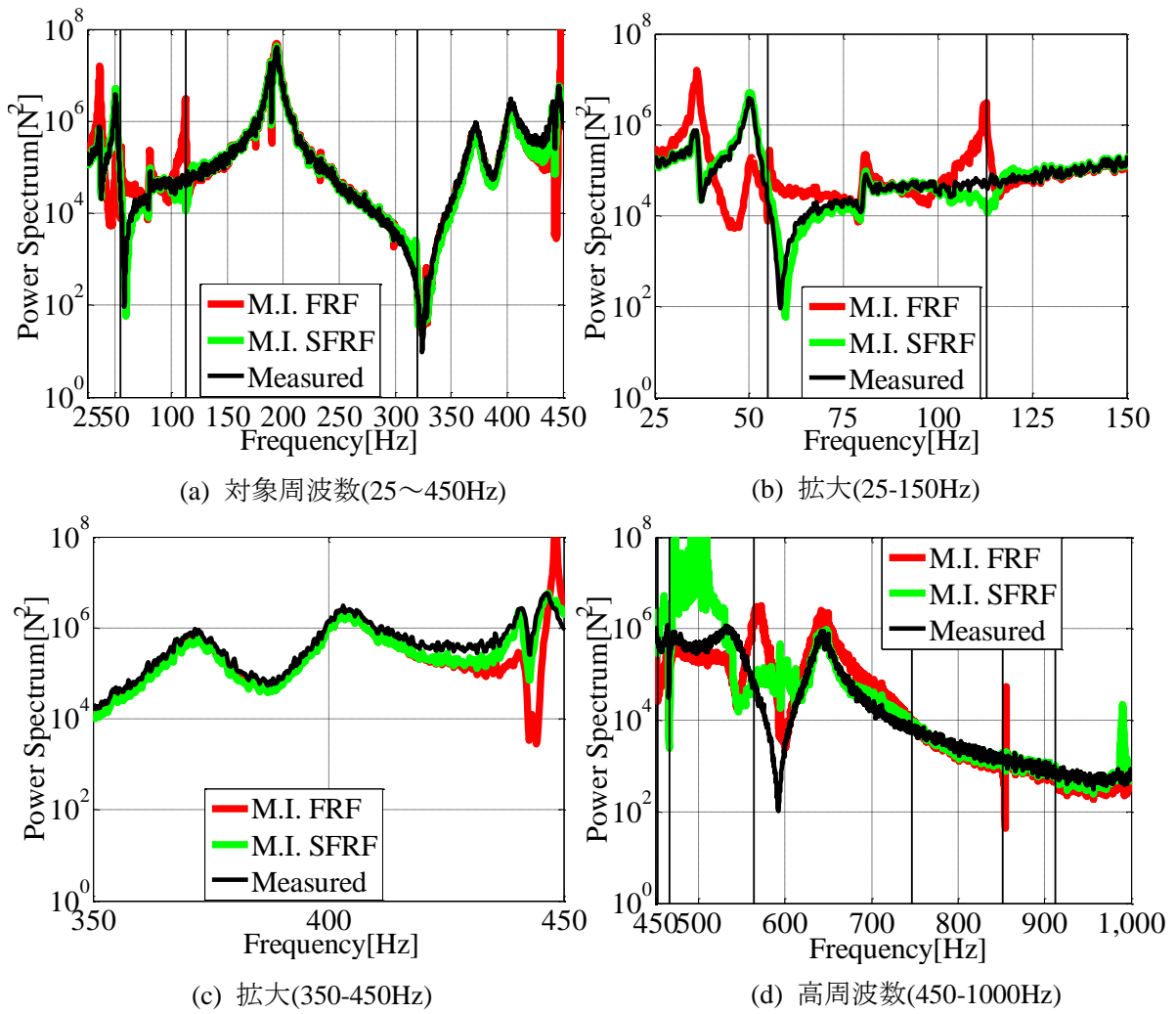


図 5.21 同定加振力のパワースペクトル(F2, 逆行列法)

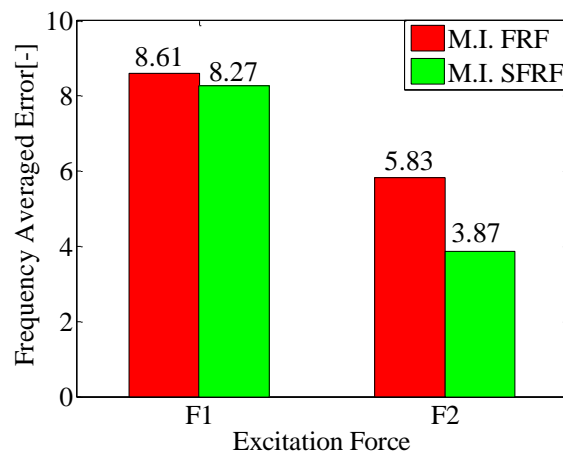


図 5.22 周波数平均誤差(逆行列法, 25~450Hz)

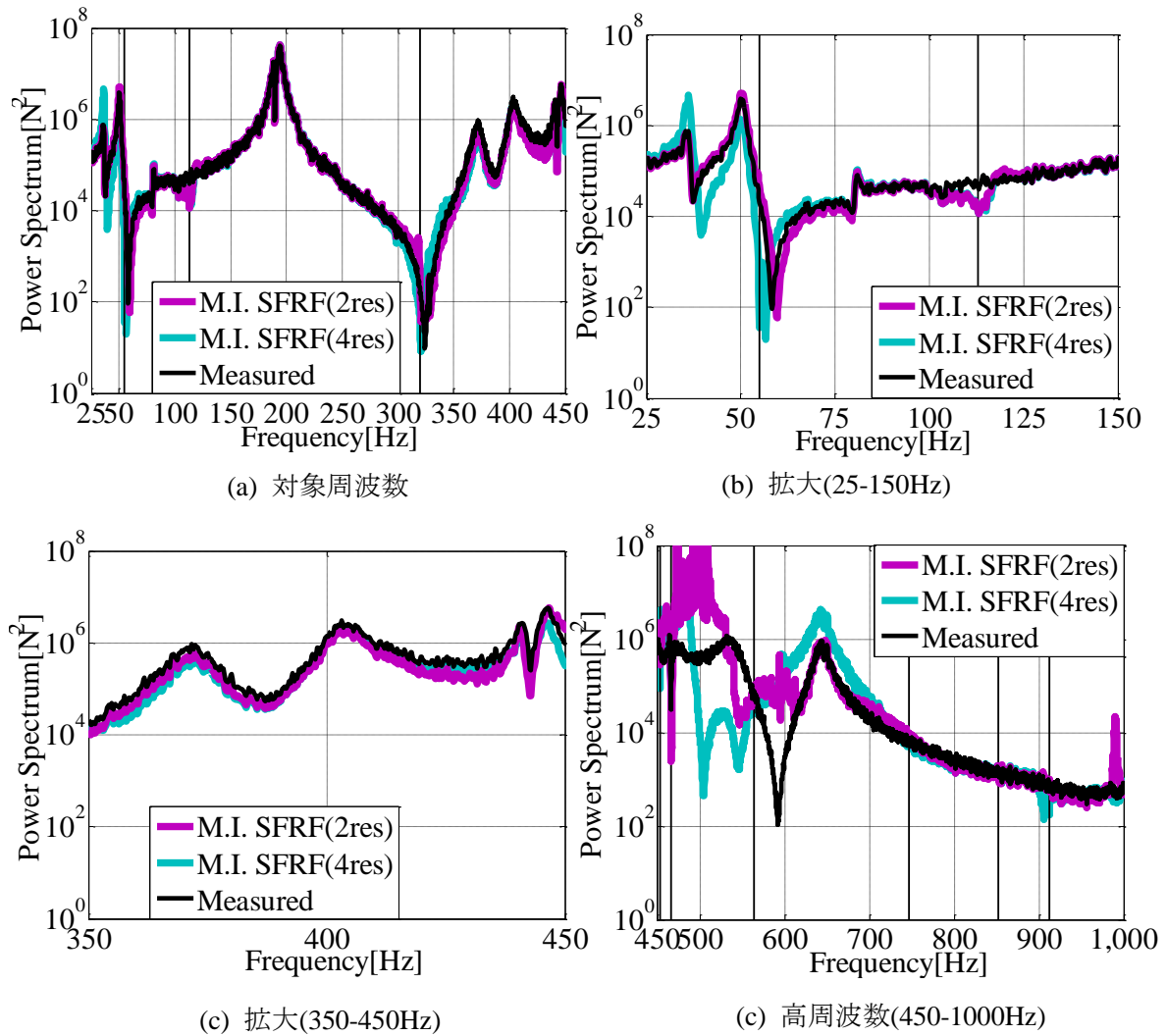


図 5.23 同定加振力のパワースペクトル(F2, 逆行列法)

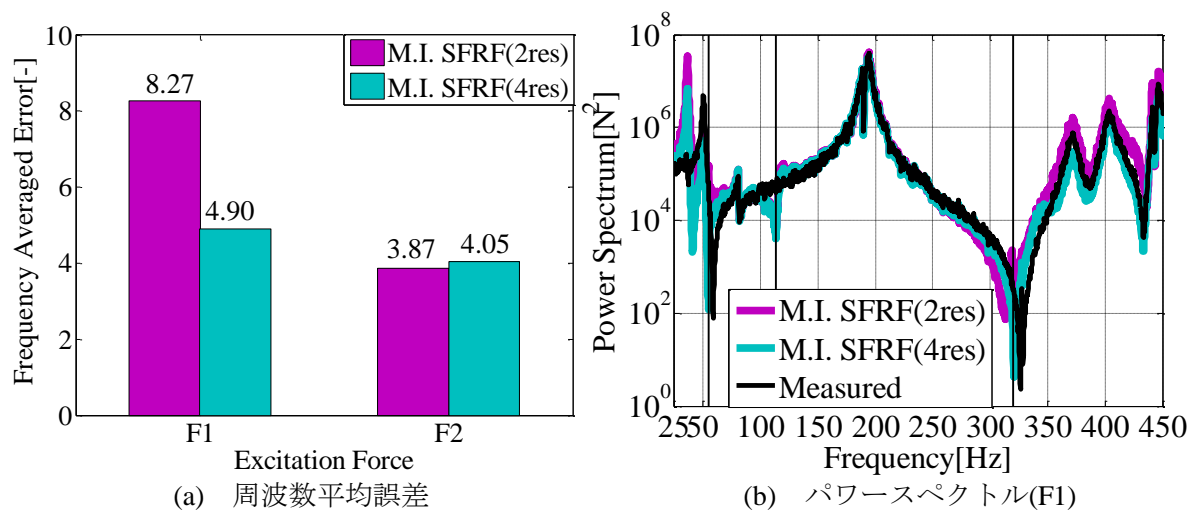


図 5.24 周波数平均誤差と F1 のパワースペクトル(逆行列法, 25~450Hz)

### 5.4.2 同定加振力の分散と信頼係数

本項では同定加振力の分散及び信頼係数を用いて提案法と従来法を比較する．なお本項の結果は F2 の結果を示していく．なお本項では逆行列法を用いた場合の結果のみを示す．

図 5.25, 図 5.26 にそれぞれ同定加振力の分散, 信頼係数を示す．図中の縦の実線は固有振動数を示す．図 5.25, 図 5.26 と第 5 章 4 節 1 項を比較すると, 分散が大きく, また信頼係数が小さい周波数は同定精度が低下していることが確認できる．図 5.25, 図 5.26 より, 固有振動数付近だけでなく, どの周波数においても SFRF の方が分散は小さく, また信頼係数も高くなり, 誤差伝播が改善されている傾向があることがわかる．

以上より入力同定に用いる応答点数が少ない場合でも, ひずみ応答を用いた手法の同定加振力の分散や信頼係数は従来法よりも優れた結果を示した．このことからひずみ応答を用いた手法の方が同定加振力のばらつきは少なく, 誤差伝播が改善されていることがわかる．また第 5 章 3 節 4 項と本項より, ひずみ応答を用いた手法において, 2 点応答は同定結果では向上しているが, 誤差伝播の観点では 4 点応答の方が同定加振力のばらつきが少なくなった．

また第 5 章 3 節 4 項と同様に, 第 4 章の数値シミュレーションと比較すると本節のひずみ応答を用いた手法の分散, 信頼係数の方が良好な結果を示した．この理由は第 5 章 3 節 4 項と同様の理由と考えられる．

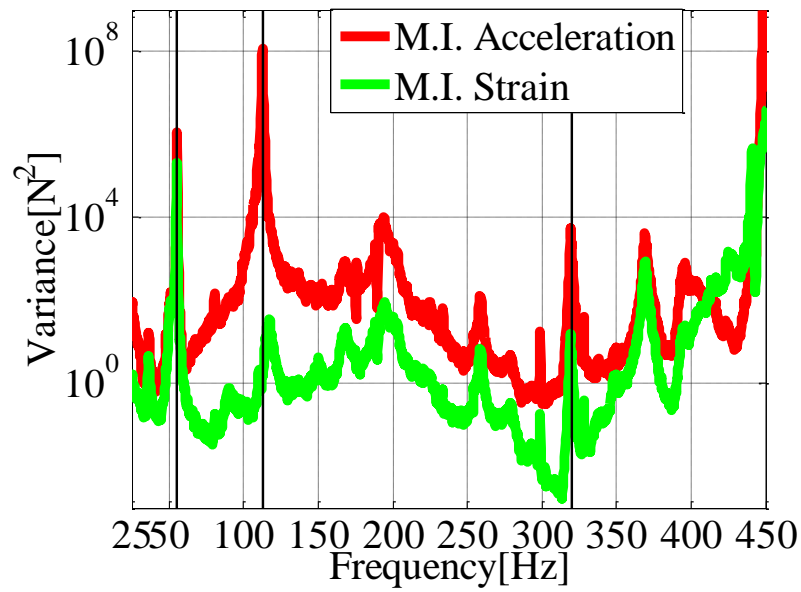


図 5.25 分散(F2, 逆行列法, 対象周波数)

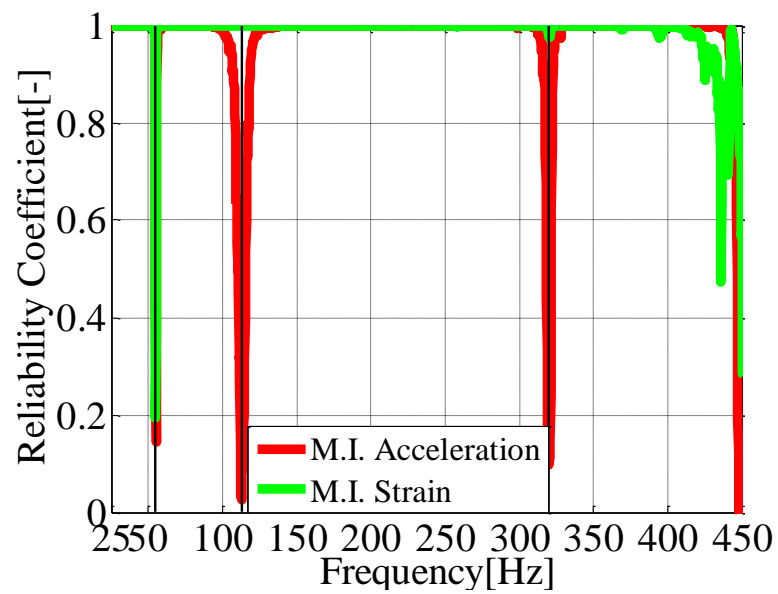


図 5.26 信頼係数(F2, 逆行列法, 対象周波数)



## 5.5 応答の再合成

TPA による寄与分析は、同定した加振力と推定した周波数応答関数からある評価点の応答を算出することが必要になる．そこで本節では第4章の数値シミュレーション同様に、得られた周波数応答関数(FRF, SFRF)と入力同定によって得られた加振力を用いて、応答の再合成を行い、加速度計を用いた手法とひずみ計を用いた手法の精度を比較する．よって再合成する応答量は加速度とひずみとする．なお再合成に使用するデータは第5章3節の2点加振4点応答のものを使用する．

### 5.5.1 再合成について

再合成の算出は第1章1節に示す、式(1.1)を用いて行う．本節では第4章のシミュレーション同様に、逆行列法を用いて同定された加振力と同定する際に使用した周波数応答関数を用いて再合成を行う．再合成の評価方法は、相対誤差、周波数平均誤差を用いて行う．第4章の数値シミュレーション同様に、相対誤差、周波数平均誤差は  $f^{(k)}(\omega)$  を  $k$  回目の応答の真値のフーリエスペクトル、 $\hat{f}^{(k)}(\omega)$  を  $k$  回目に再合成された応答のフーリエスペクトルとして求める．

### 5.5.2 再合成の条件

本節では第5章3節の2点加振4点応答のデータを使用して再合成を行う．図5.27に加振点位置を示す．また評価点は図5.27の応答点③とする．

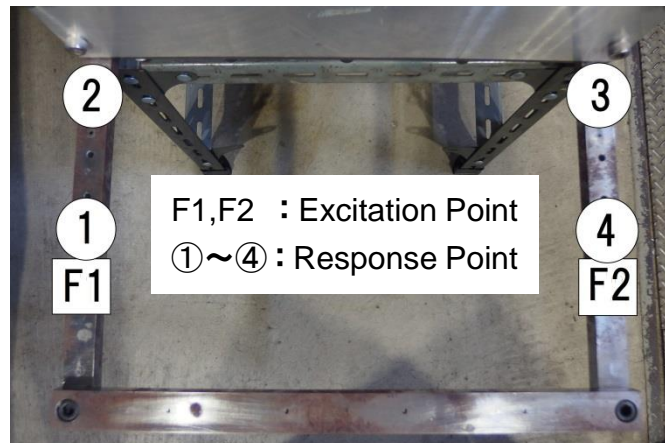


図 5.27 応答点位置

### 5.5.3 再合成の結果

本項では各応答を用いた入力同定によって得られた加振力と各周波数応答関数を用いて再合成を行った結果を示す。なお結果は逆行列法に基づくもののみとする。

図 5.28, 図 5.29 にそれぞれ加速度応答の再合成結果, ひずみ応答の再合成結果を示す。図 5.30 に再合成した各応答の真値に対する相対誤差を示す。図 5.31 に周波数平均誤差を示す。

図 5.28 より再合成した加速度応答は 175~350Hz 以外の周波数ではほぼ一致していないことがわかる。一方で図 5.29 より再合成したひずみ応答は 100~175Hz では精度が悪いが, それ以外の周波数は概ね良好な結果を示していることがわかる。図 5.30 より, 250~350Hz 付近では加速度応答の方が誤差は小さいが, それ以外の周波数はひずみ応答の方が誤差は小さいことがわかる。また図 5.31 より, 周波数平均誤差はひずみ応答の方が小さいことがわかる。

以上より, 実際の TPA で評価する値である, 再合成値を算出したところ, ひずみ応答を用いた手法は従来法よりも精度が高い傾向があることがわかった。

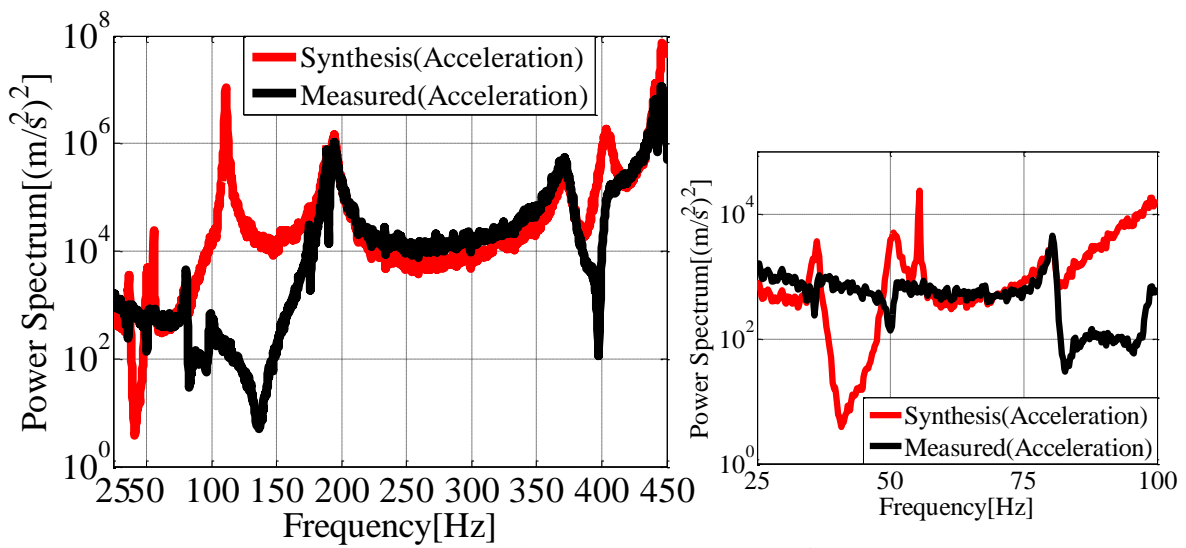


図 5.28 評価点③の加速度応答の再合成(左：対象周波数 右：拡大)

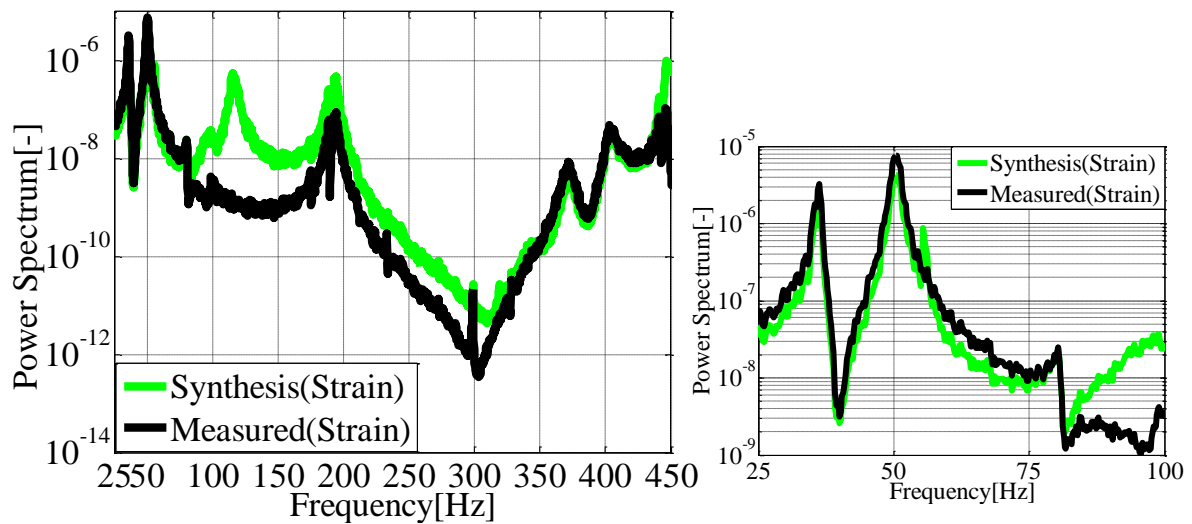


図 5.29 評価点③のひずみ応答の再合成(左：対象周波数 右：拡大)

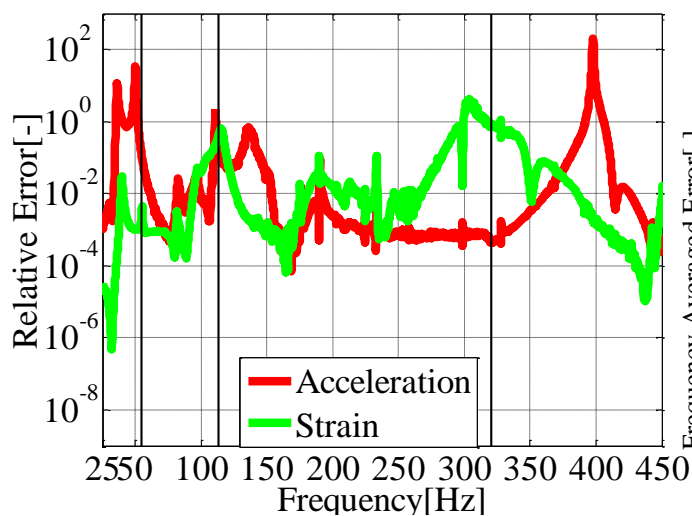


図 5.30 再合成値の相対誤差(対象周波数)

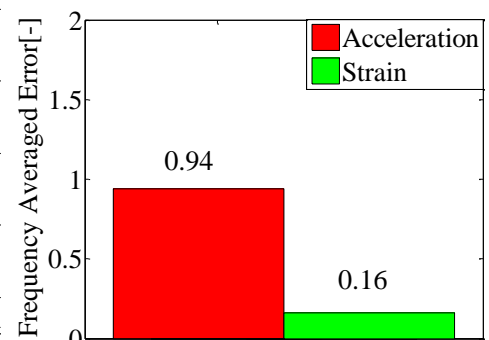


図 5.31 再合成値の周波数平均誤差(対象周波数)

## 5.6 伝達経路の見落としした場合の同定誤差の比較

入力同定においては、加振力の作用点を予め仮定してから計測を行う必要がある。しかし複雑な構造物の場合には、加振力の伝達経路を見落とすことがある。この場合、予め仮定された伝達経路における同定精度が低下することが考えられる。

本項では、伝達経路を見落としした場合の入力同定を行い、加速度計を用いた入力同定とひずみ計を用いた入力同定の精度を比較する。評価方法としては、周波数平均誤差を用いる。なお本節では比較を容易にするため、逆行列法のための結果を示していく。

### 5.6.1 実験条件

加振点、応答点条件を図 5.32 に示す。本節では F2 のみが伝達経路であるとみなし、F1 は入力同定から除外する。そのため、周波数応答関数の推定は F2 の加振によって得られたデータのみを用いて行う。それ以外の実験条件は第 5 章 3 節と同様である。

入力同定には①～④の応答点を使用し、加速度応答、ひずみ応答をそれぞれ用いた場合の同定結果を比較する。

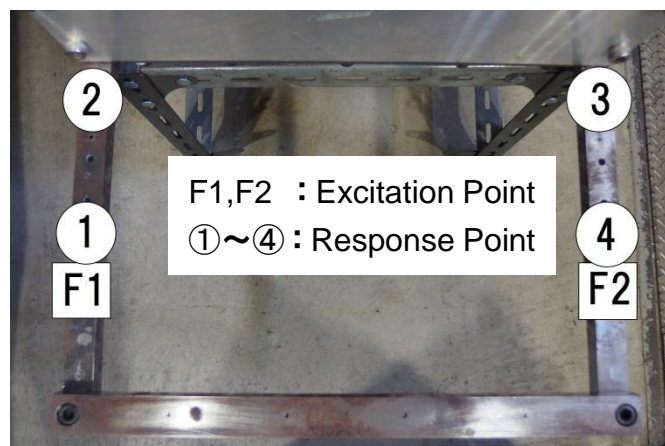


図 5.32 応答点位置

### 5.6.2 入力同定結果

各応答を用いた入力同定によって得られた加振力のパワースペクトルと同定誤差を比較する．本実験では F1 は入力同定から除外しているため F2 の結果のみを示す．なお本項では逆行列法を用いた場合の結果のみを示す．

図 5.33 に F2 のパワースペクトルを示す．図中の縦線は受動系の固有振動数(前部フレーム主体のモード時の固有振動数)を示す．また図 5.34 に周波数平均誤差を示す．

図 5.33 より 100Hz 付近では FRF, SFRF 共に同定精度が低下しているが，それ以外の周波数においては SFRF の方が同定精度は高いことがわかる．また図 5.34 より SFRF の方が同定誤差は小さいことがわかる．

以上より伝達経路を見落とした場合においてもひずみ応答を用いた入力同定は有効であることがわかる．

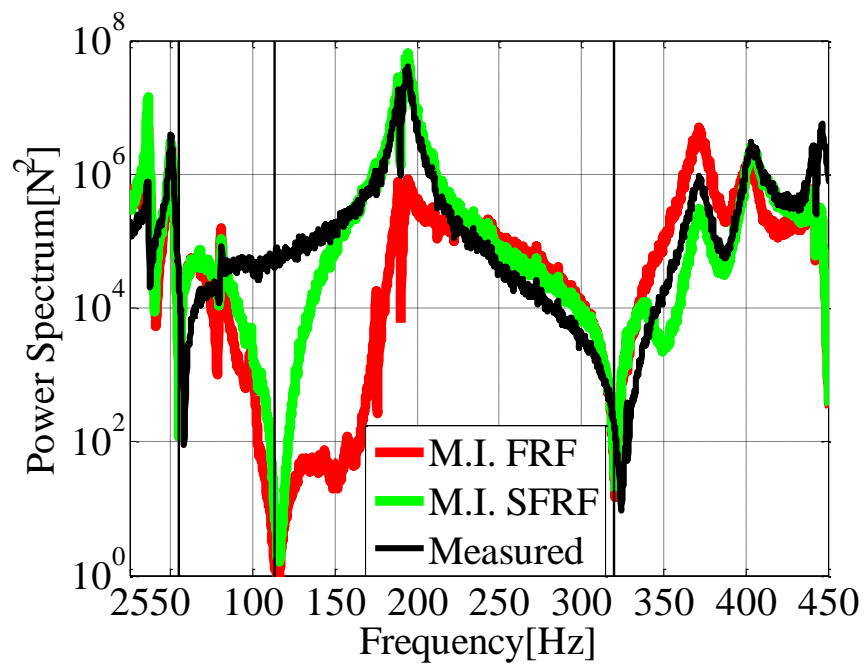


図 5.33 同定加振力のパワースペクトル(F2, 逆行列法)

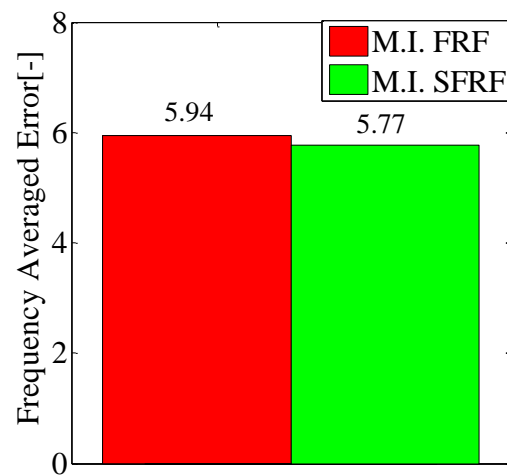


図 5.34 周波数平均誤差(F2, 逆行列法)

## 5.7 第5章のまとめ

本章では実車両を模擬した簡易構造物を用いた加振実験を行い，加速度応答を用いた入力同定とひずみ応答を用いた入力同定を比較した．

その結果，逆行列法，動質量法共にひずみ応答を用いた入力同定は従来法よりも同定精度が向上する傾向があることがわかった．この理由としては，ひずみ周波数応答関数は高次モードの影響を受け，悪条件が緩和されているためと考えられる．さらに高周波数になると従来法と提案法はほぼ同程度の精度になることから，ひずみ応答を用いた入力同定は低周波数において有効な手法であることが明らかになった．また入力同定においてひずみ計を用いると同定加振力のばらつきが少なく，誤差伝播が改善される．

従来法と比較してひずみ計は少ない応答点数でも精度の高い入力同定が可能であることがわかった．さらに対象とする加振点付近のひずみ応答のみを使用することで精度の高い入力同定が可能であることが明らかになった．

TPA による寄与解析で必要とされる再合成値を算出したところ，ひずみ応答を用いた手法の方が従来法よりも精度が高いことがわかった．

以上よりシミュレーションにおける検討内容が実構造物に対しても有効であることが分かった．さらに誤差伝播の観点では，本章の結果の方が第4章の数値シミュレーションよりもひずみ応答を用いた入力同定の有効性が顕著に現れた．

また伝達経路を見落とした場合においてもひずみ応答を用いた入力同定は有効であることが明らかになった．

## 第 6 章

# ひずみ計の設置個数と 設置箇所について



## 6.1 概要

第 5 章では対象とする加振点付近のひずみ応答のみを使用することで精度の高い入力同定が可能であるということが明らかになった。そこで本章では、加振点付近にひずみ計を設置した場合、ひずみ計の設置個数や設置箇所に同定精度は依存するのかを検討する。

本章では第 5 章で述べた実車両を模擬した簡易構造物を用いた加振実験を行い、検討していく。

## 6.2 入力同定実験：加振点付近におけるひずみ計の設置個数について

本節では加振点付近にひずみ計を設置した場合、ひずみ計の個数に応じて入力同定精度が変化するのかを検討する。第 5 章で述べた実車両を模擬した簡易構造物を用いた加振実験を行い、検討を行っていく。本実験は応答点数を 6 点に変更する以外は全て第 5 章の実験と同一とする。入力同定の評価方法としては、周波数平均誤差、同定加振力の分散を用いる。なお本節では比較を容易にするため、逆行列法のための結果を示していく。

### 6.2.1 実験方法

実験装置は第 5 章で用いたものと同様である。また加振条件、解析条件、実験方法は第 5 章と同一とする。但し、図 6.1 に示すように応答点数は 6 点に変更して実験を行う。

本節では各加振点に着目して入力同定を行う。入力同定に使用するひずみ応答の点数を 2 点、3 点、6 点と変更し、それぞれの場合における各加振点の同定精度を比較する。図 6.2 に F1 に着目した場合の応答計測点の位置を示す。図 6.3 に F2 に着目した場合の応答計測点の位置を示す。入力同定結果の対象周波数は 25～450Hz とする。

まず第 6 章 2 節 2 項では図 6.2 に示すように F1 付近の応答点を用いて入力同定を行う。F1 に着目した入力同定を行い、同定精度を比較する。

続いて第 6 章 2 節 3 項では図 6.3 に示すように F2 付近の応答点を用いて入力同定を行う。F2 に着目した入力同定を行い、精度を比較する。

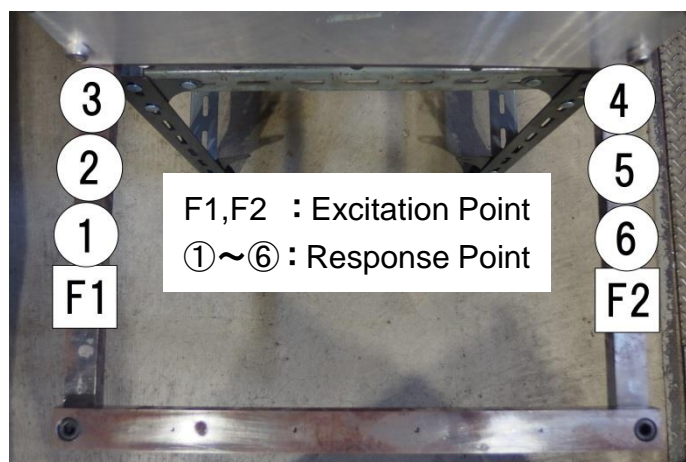


図 6.1 加振点と応答計測点の位置

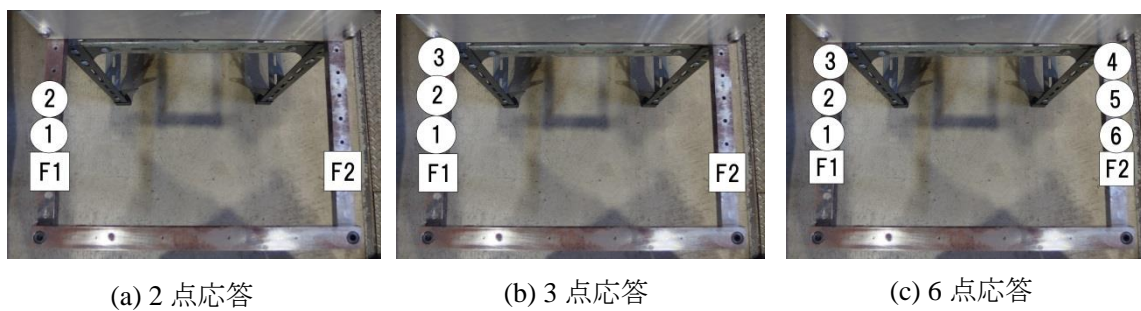


図 6.2 応答計測点の位置：F1 に着目した場合

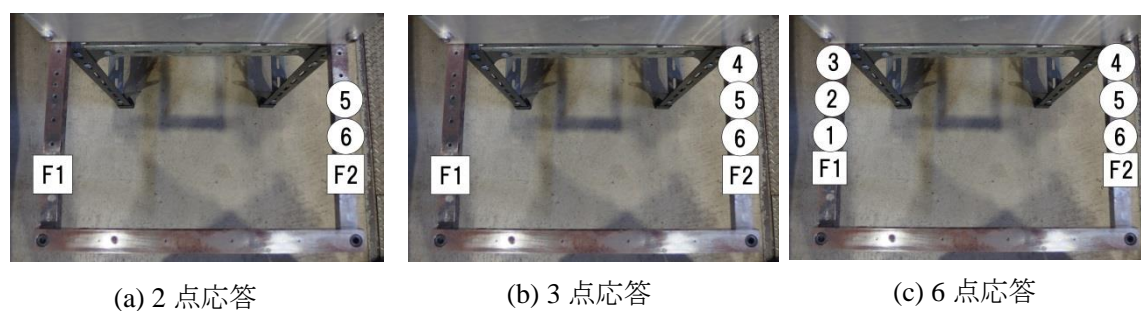


図 6.3 応答計測点の位置：F2 に着目した場合

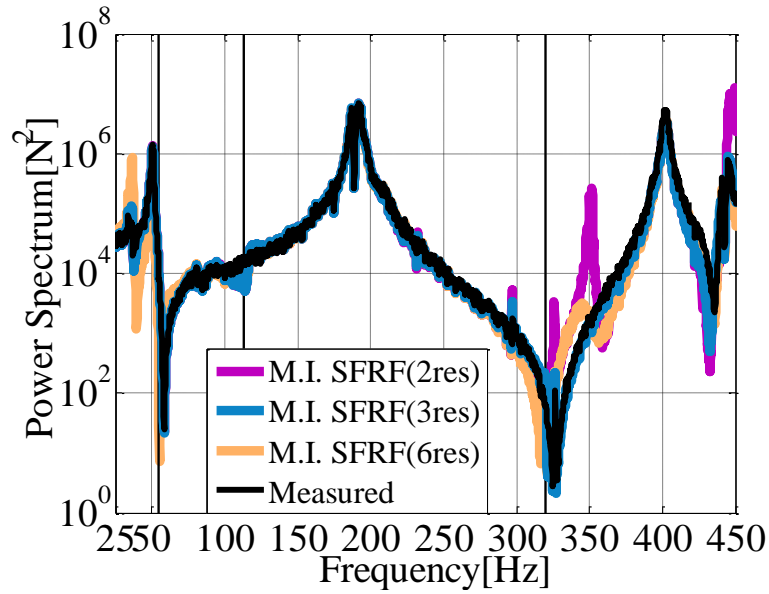
### 6.2.2 入力同定結果(F1 に着目した場合)

本項では各応答を用いた入力同定によって得られた加振力のパワースペクトルと同定誤差，さらに同定加振力の分散を比較する．本項では F1 に着目した場合の結果を示していく．なお本項では逆行列法を用いた場合の結果のみを示す．

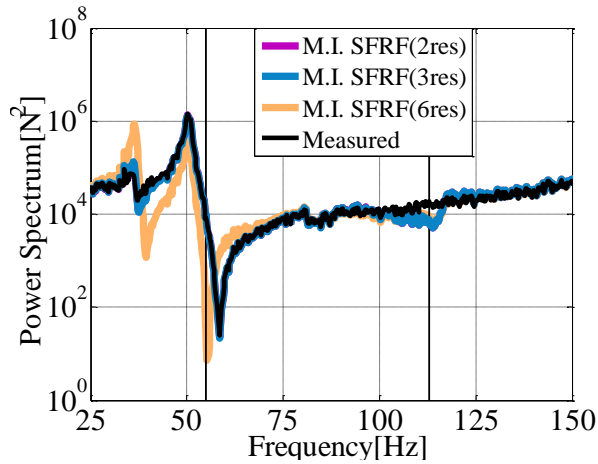
図 6.4 に F1 のパワースペクトルを示す．図中の縦線は受動系の固有振動数(前部フレーム主体のモード時の固有振動数)を示す．図 6.5 に F1 の周波数平均誤差，図 6.6 に F1 の同定加振力の分散を示す．

図 6.4 より 2 点応答，3 点応答の方が 6 点応答よりも固有振動数付近における同定精度が高いことがわかる．また 2 点応答と 3 点応答は 300Hz までの周波数ではほぼ同等の同定精度だが，300Hz 以降の周波数では 3 点応答の方が同定精度は高いことがわかる．図 6.5 より周波数平均誤差は 3 点応答が最も誤差が小さくなった．またパワースペクトルでは良好な結果だった 2 点応答は，平均すると最も誤差が大きくなった．これは 2 点応答が 350Hz，450Hz 付近の同定誤差が大きかったためと考えられる．図 6.6 より，同定誤差が大きくなっている周波数では分散が大きくなっていることがわかる．また 2 点応答と 3 点応答を比較すると，3 点応答の方が分散は小さく，誤差伝播が改善されていることがわかる．しかし，1 次，3 次の固有振動数付近において 2 点応答，3 点応答の分散が，6 点応答よりも大きくなっており，誤差伝播が改善していることが示されていない．

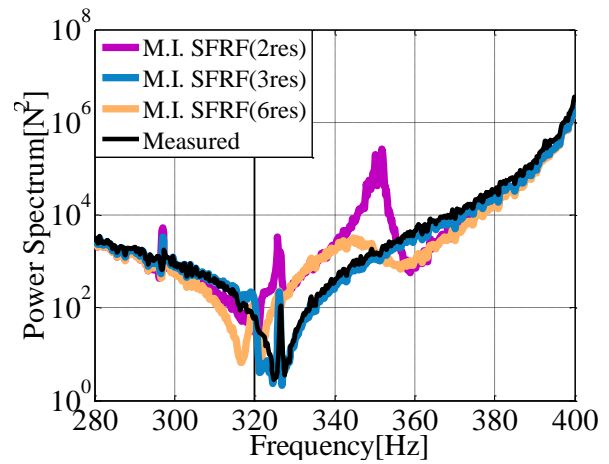
以上より，ひずみ計は少ない応答点数でも精度の高い入力同定が可能であることがわかる．この理由は第 3 章の結果を踏まえて考察すると，2 点応答，3 点応答の場合は対象とする加振力である F1 の付近の応答のみを用いており，高次モードの影響が大きい SFRF のみを使用して入力同定を行っているためと考えられる．また加振点付近にひずみ計を設置した場合，センサーの数が多い方が入力同定精度は向上し，誤差伝播も改善される傾向があることがわかった．しかし同定精度の高い 3 点応答の分散が 6 点応答よりも大きくなる周波数があることが確認された．この理由は以下のように考えられる．同定加振力の分散を誤差評価に用いる場合，加振力の真値が同定加振力の平均に一致すると仮定している．受動系の固有振動数付近では同定加振力が偏り誤差を持つため，3 点応答の方が同定誤差は 6 点応答よりも小さくても，同定加振力の分散は小さくならないと考えられる．しかしこの考察に関してはまだ仮説の域を出ないため，今後，検討を要する．



(a) 対象周波数



(b) 拡大(25-150Hz)



(c) 拡大(280-400Hz)

図 6.4 同定加振力のパワースペクトル(F1, 逆行列法)

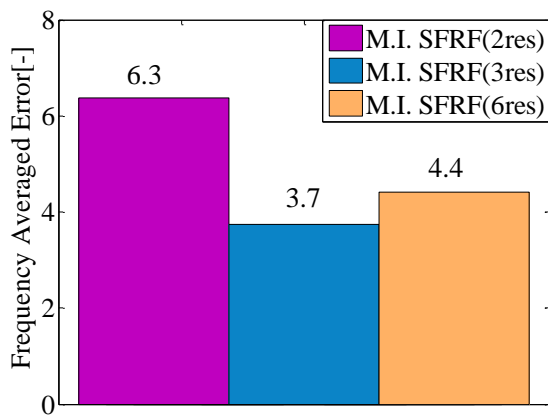


図 6.5 周波数平均誤差(F1, 逆行列法)

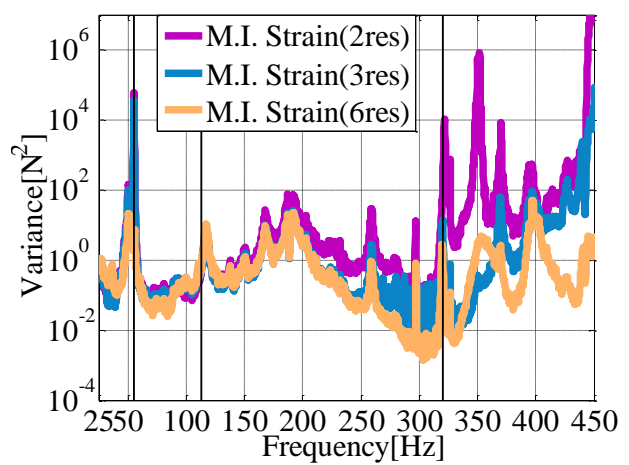


図 6.6 分散(F1, 逆行列法)

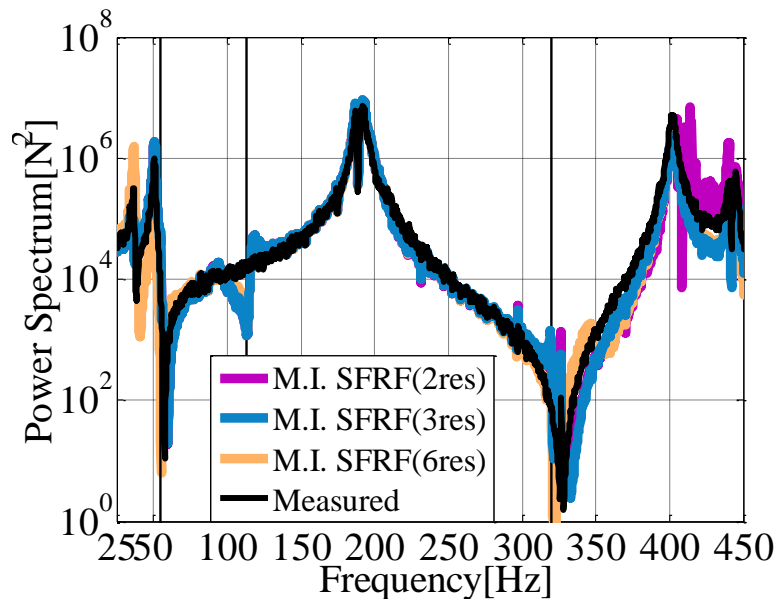
### 6.2.3 入力同定結果(F2 に着目した場合)

本項では各応答を用いた入力同定によって得られた加振力のパワースペクトルと同定誤差，さらに同定加振力の分散を比較する．本項では F2 に着目した場合の結果を示していく．なお本項では逆行列法を用いた場合の結果のみを示す．

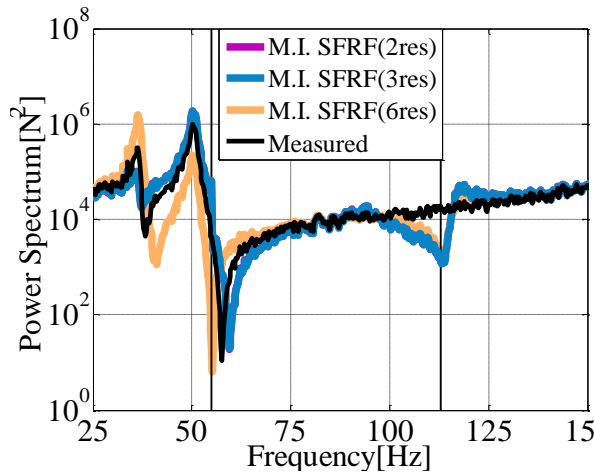
図 6.7 に F2 のパワースペクトルを示す．図中の縦線は受動系の固有振動数(前部フレーム主体のモード時の固有振動数)を示す．また図 6.8 に F2 の周波数平均誤差を示す．図 6.9 に F2 の同定加振力の分散を示す．

図 6.7 より 2 点応答，3 点応答の方が 6 点応答よりも固有振動数付近における同定精度が高いことがわかる．また 2 点応答と 3 点応答は 400Hz までの周波数ではほぼ同等の同定精度だが，400Hz 以降は 3 点応答の方が同定精度は高いことがわかる．図 6.8 より周波数平均誤差は 3 点応答が最も誤差が小さくなった．また平均すると 2 点応答が最も誤差が大きくなった．図 6.9 より，同定精度が低下している周波数は分散も大きくなっていることがわかる．第 6 章 2 節 2 項と同様に，3 点応答の分散は 2 点応答よりも小さくなっており，誤差伝播が改善されていることがわかる．しかし 1 次，3 次の固有振動数付近において 3 点応答の分散は 6 点応答よりも大きくなっており，誤差伝播が改善されていることが示されていない．この理由は第 6 章 2 節 2 項と同様に，同定加振力の分散を誤差評価に用いる場合，加振力の真値が同定加振力の平均であると仮定しているためと考えられる．

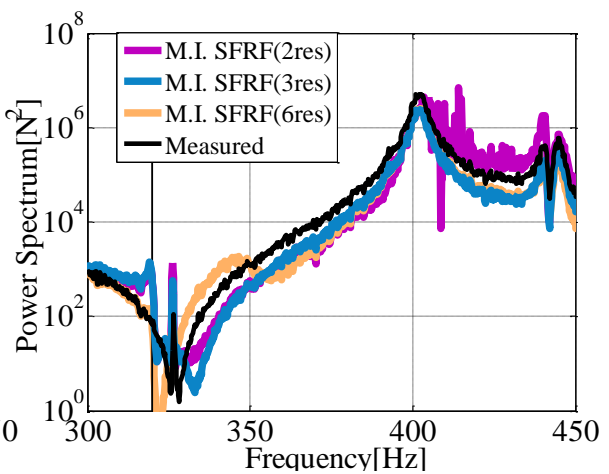
以上より第 6 章 2 節 2 項同様にひずみ計は少ない応答点数でも精度の高い入力同定が可能であることがわかり，また加振点付近にひずみ計を設置した場合，センサーの数が多い方が入力同定精度は向上する傾向があることがわかった．



(a) 対象周波数



(b) 拡大(25-150Hz)



(c) 拡大(300-350Hz)

図 6.7 同定加振力のパワースペクトル(F2, 逆行列法)

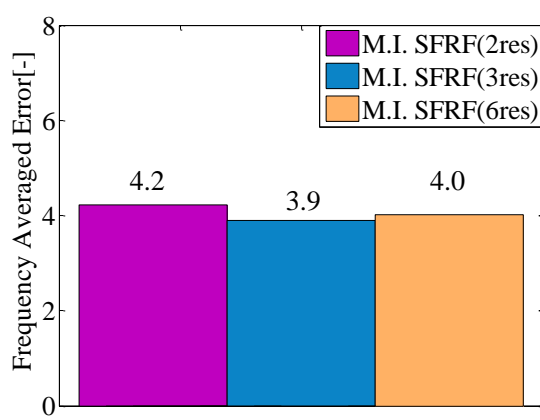


図 6.8 周波数平均誤差(F2, 逆行列法)

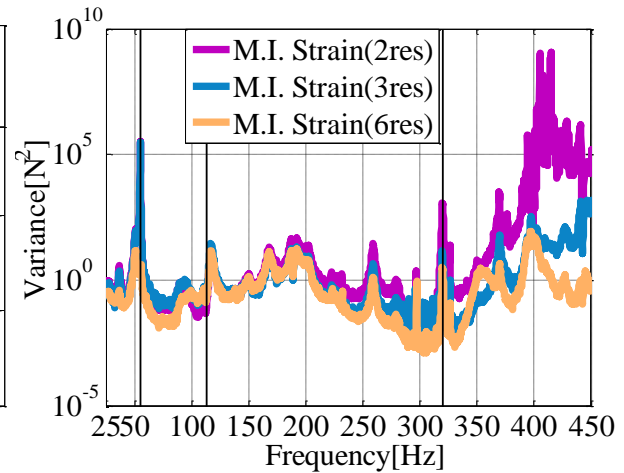


図 6.9 分散(F2, 逆行列法)

#### 6.2.4 入力同定結果(各入力を同時に解く場合と個別に解く場合の比較)

第6章2節2項と第6章2節3項では各加振力を個別に解き、その結果を比較した。本項では各加振点を同時に解く場合と個別に解く場合を、全加振点(F1, F2)における加振力の誤差である総合周波数平均誤差より比較する。総合周波数平均誤差は、各加振点における加振力の周波数平均誤差を平均して算出する。

図 6.10 に各加振点を同時に解いた場合と個別に解いた場合の総合周波数平均誤差を示す。図中の「SFRF(2res)-Individually」、「SFRF(3es)- Individually」は各加振点を個別に2点応答で解いた場合、3点応答で解いた場合の総合周波数平均誤差を示す。また「SFRF(6res)-Simultaneously」は各加振点を6点応答で同時に解いた場合の総合周波数平均誤差を示す。

図 6.10 より3点応答の方が6点応答よりも総合周波数平均誤差が小さいことがわかる。また2点応答が最も誤差は大きくなっている。

第6章2節2項と第6章2節3項、さらに本項の結果より、ひずみ計を用いて入力同定を行う際には各加振点を同時に解くのではなく、個別に解くことによって精度の高い入力同定が可能であることが明らかになった。しかし2点応答の総合周波数平均誤差が最も大きくなってしまっていることから、センサーの数が多い方が同定精度は安定する傾向がある。

入力同定においては、加振力の作用点を予め仮定してから計測を行う必要があり、実車両のような複雑な構造物の場合には、加振力の伝達経路を見落とすことによって同定精度が低下する場合が考えられる。よって各加振力を個別に解くということは加振力の伝達経路の見落としによる誤差を軽減することができるため、有効な手段と言える。

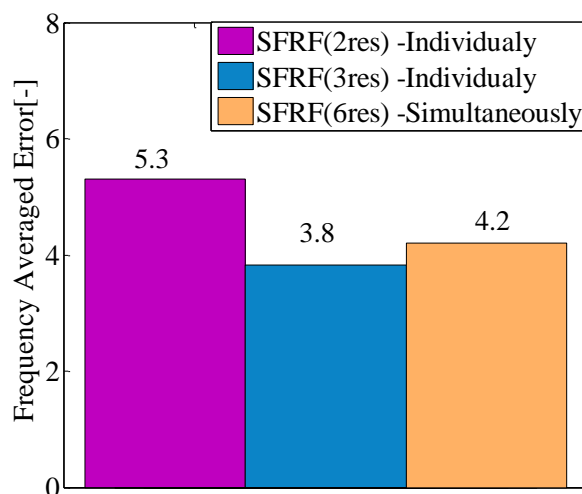


図 6.10 総合周波数平均誤差(F1・F2, 逆行列法)



### 6.3 入力同定実験：加振点付近におけるひずみ計の設置箇所について

本節では加振点付近にひずみ計を設置した場合、ひずみ計の設置箇所に応じて入力同定精度が変化するかを検討する。本節では第 5 章で示した実車両を模擬した簡易構造物を用いた加振実験を行い、検討をしていく。入力同定の評価方法としては、周波数平均誤差、同定加振力の分散を用いる。なお本節では比較を容易にするため、逆行列法のみの結果を示していく。

#### 6.3.1 実験方法

実験装置は第 5 章で用いたものと同様である。加振条件、解析条件、実験方法は第 5 章と同一とする。但し、応答計測位置は図 6.11 に示すように変更して実験を行う。

本節では加振点 F2 に着目して入力同定を行う。入力同定に使用する応答点を①と②とした場合(Case1)と応答点を②と③とした場合(Case2)を比較する。図 6.12 に F2 に着目した場合の応答計測点の位置(Case1, Case2)を示す。入力同定結果の対象周波数は 25～450Hz とする。

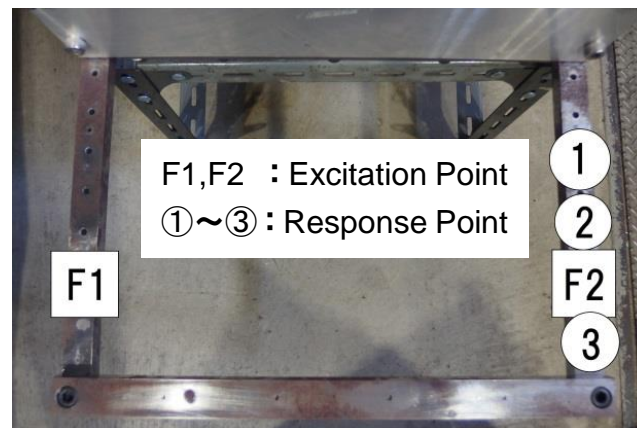


図 6.11 加振点と応答計測点の位置



(a) Case1



(a) Case2

図 6.12 応答計測点の位置



### 6.3.2 入力同定結果

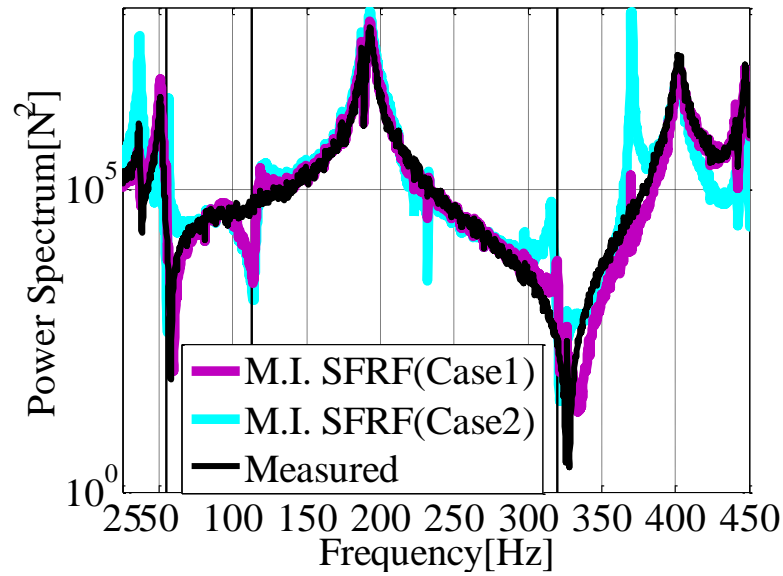
本項では入力同定によって得られた加振力のパワースペクトルと同定誤差を比較する。また同定加振力の分散の比較も行う。なお本項では逆行列法を用いた場合の結果のみを示す。

図 6.13 に F2 のパワースペクトルを示す。図中の縦線は受動系の固有振動数(前部フレーム主体のモード時の固有振動数)を示す。図 6.14 に F2 の周波数平均誤差を示す。図 6.15 に F2 の分散を示す。

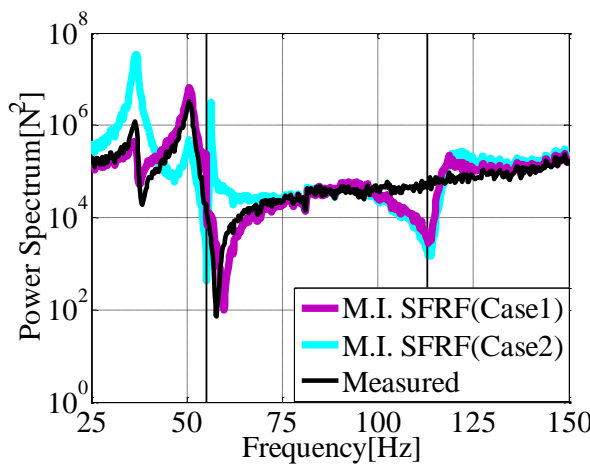
図 6.13 より Case1 の方が Case2 よりパワースペクトルのピーク間における入力同定精度は高い。Case2 は 25～50Hz, 350～400Hz において、大きく誤差が生じており、また図 6.14 より Case2 の方が周波数平均誤差は大きい。図 6.15, 図 6.13 より、Case1, Case2 共に分散が大きい周波数は同定精度が低下していることが確認できる。Case2 は同定精度の低い 50Hz 付近や 350～400Hz 以外の周波数においても Case1 より分散が大きくなっているため、Case2 の誤差伝播が大きいことがわかる。しかし Case1 は 400～450Hz では分散が大きくなってしまっている。

Case2 の同定精度が悪くなったのは、応答点③はフレームの先端にあるためにひずみ量が少なく、SN 比が小さくなったためと考えられる。

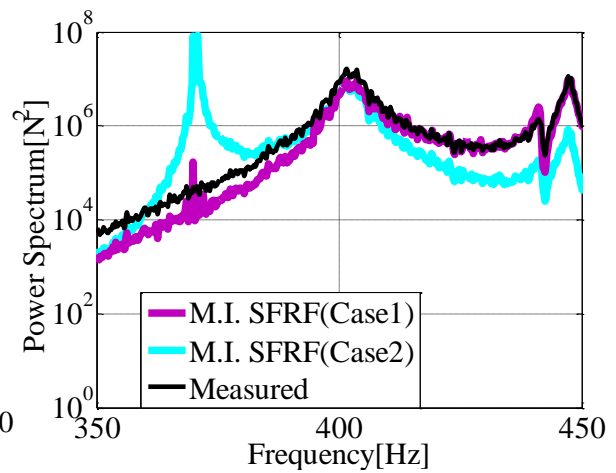
以上より、加振点付近であってもひずみ量の少ない部位の応答を入力同定に使用した場合、同定精度が低下する場合あることが確認された。



(a) 対象周波数



(b) 拡大(25-150Hz)



(c) 拡大(350-450Hz)

図 6.13 同定加振力のパワースペクトル(F2, 逆行列法)

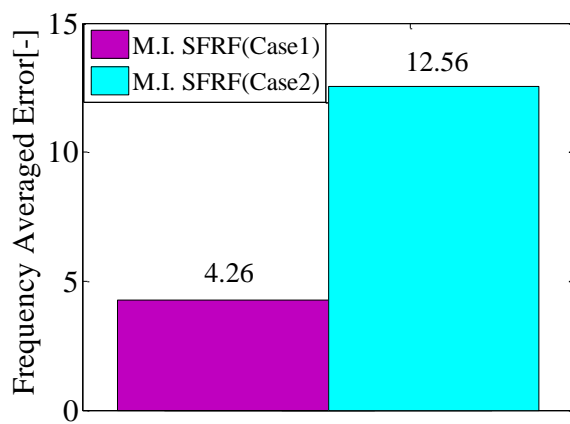


図 6.14 周波数平均誤差(F2, 逆行列法)

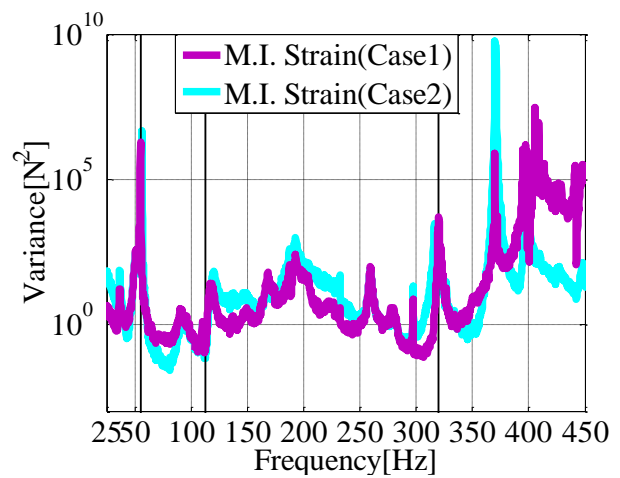


図 6.15 分散(F2, 逆行列法)

#### **6.4 第6章のまとめ**

本章では、加振点付近にひずみ計を設置した場合、ひずみ計の設置個数や設置箇所に同定精度は依存するのかを検討した。

その結果、ひずみ計は少ない応答点数でも精度の高い入力同定が可能であり、また加振点付近にひずみ計を設置した場合、センサーの数が多い方が入力同定精度は向上する傾向があることが明らかになった。

ひずみ計を用いて入力同定を行う際には各加振点を同時に解くのではなく、個別に解くことによって精度の高い入力同定が可能であると考えられる。また数値シミュレーションと同様に、加振点付近であってもひずみ量の少ない部位の応答を入力同定に使用した場合、同定精度が低下する場合があることがわかった。

## 第 7 章

### 結言

## 7.1 結言

本研究では伝達経路解析における入力同定精度向上のために、ひずみ測定を用いた入力同定手法を提案し、数値シミュレーション及び簡易構造物を用いた実験からその有効性を検討した。得られた結果を以下にまとめて述べる。

- 加振点応答におけるひずみ周波数応答関数は高次モードの影響を強く受けている。また加振点付近以外ではアクセラランスの方が高次モードの影響を強く受ける傾向がある。
- 入力同定において加振点応答の測定が可能な場合、ひずみ周波数応答関数を用いることで従来法よりも入力同定精度が向上する。
- 本研究では入力同定の手法として逆行列法と動質量法を用いたが、どちらの手法においてもひずみ応答を用いた方が同定精度は向上する。
- ひずみ周波数応答関数を用いた入力同定は低周波域において特に有効である。
- 入力同定においてひずみ計を用いると同定加振力のばらつきが少なく、誤差伝播が改善される傾向がある。
- TPA による寄与解析で必要とされる再合成値を算出したところひずみ応答を用いた手法の方が従来法よりも再合成の精度が高くなる。
- 伝達経路を見落とした場合においてもひずみ応答を用いた入力同定は有効である。
- 対象とする加振点付近のひずみ応答のみを使用することで精度の高い入力同定が可能である。よってひずみ計を用いて入力同定を行う際には各加振点を同時に解くのではなく、個別に解くことによって精度の高い同定結果が得られる。またその場合、対象とする入力点付近のセンサーの数を増やすことで同定精度が向上する。
- ひずみ量の少ない部位にひずみ計を設置した場合、加振点付近であっても入力同定精度が低下する場合がある。

## 7.2 今後の課題

今後の課題として以下が挙げられる。

- ひずみ計の設置場所の明確化

本研究では入力同定においてひずみ計を加振点付近に取り付けることで、高次モードの影響を大きく受けた周波数応答関数を推定でき、同定精度が向上することがわかった。しかし「加振点付近」というのは定性的表現であり、加振点からどの程度離れると高次モードの影響が少なくなってしまうのかというのは判明していない。ひずみ計の取り付け位置を決定する明確な基準を明らかにするためには、本論文でも述べた誤差伝播のような指標値から検討することが有効であると考えられる。

- ひずみ計の設置する方向

本研究の数値シミュレーションや実験では，構造物の長手方向のひずみ応答のみを測定し，それを用いて入力同定を行っている．よって計測するひずみ応答の方向を変更することで，入力同定精度にどのように影響してくるかを検討する必要があると考える．この検討は3次元構造物では特に重要となる．

- 実車両での検討

本研究ではひずみ応答を用いた入力同定の有効性を，実車両を模擬した簡易構造物を用いた加振実験より検討した．しかし本研究で得られた内容が有効であることを示すためには，簡易構造物だけでなく多数の部品によって構成された実車両に対しても検討を行う必要があると考える．

参考文献

- 1) 藤田 佳幸, ステアリングホイール製品の現状と今後の動向, 豊田合成技報 VOL51, (2009)
- 2) 能村幸介, 実稼動伝達経路解析の理論と適用例, 日本音響学会誌 67 巻 4 号 (2011)
- 3) 小林樹幸, 吉村卓也, 動質量行列を用いた入力同定手法の分散評価, 日本機械学会論文集 C 編, 76-765, (2010)
- 4) 中川徹, 小柳義夫, 最小二乗法による実験データ解析, 東京大学出版, 1982
- 5) 高橋一善, 吉村卓也, 振動系における入力同定に関する研究, 首都大学東京大学院修士論文, (2012)
- 6) SEA と TPA による機械構造物の入力パワーと伝達寄与に関する一考察, 日本機械学会論文集 (C 編), 79 巻 799 号 (2013-3)
- 7) B.Hillary, D.J.Ewins, The Use of Strain Gauges in Force Determination and Frequency Response Function Measurements, IMAC, (1984), pp.627-634.
- 8) 中野議貴, 力のモーメントを考慮した加振力の同定, Dynamics & Design Conference 2009, "122-1"- "122-6"
- 9) Thomas Edwin Slaughter Kriel, Assessment of Frequency Domain Force Identification Procedures, University of Pretoria, 2000
- 10) Theo Geluk and Peter Van der Linden (LMS International), Davide Vige', Massimo Caudano, Simone Gottardi and Fabio Ciralo (Fiat Group Automobiles), Hamid Mir (Chrysler Group LLC), Noise Contribution Analysis at Suspension Interfaces Using Different Force Identification Techniques, SAE(2011)
- 11) 小林 樹幸, 吉村 卓也, 逆行列を用いた入力同定の分散評価, 日本機械学会論文集, C 編, Vol.77, No.776, pp. 1342-1355, 2011
- 12) 小林樹幸, 振動問題における入力同定と誤差評価に関する研究, 首都大学東京大学院 2011年博士 (工学)学位論文
- 13) 永井健一, ダイナミクス of システム解析, 森北出版株式会社
- 14) 砂子田勝昭, 伊藤智博, 鄭萬溶, 平元和彦, わかりやすい振動工学, 共立出版株式会社, (2012)
- 15) JSME テキストシリーズ 振動学, 社団法人日本機械学会, (2005)
- 16) 国井隆弘, 構造振動学入門, 工学出版株式会社, (1995)

## 質疑に対する回答

### ● 小口先生

Q1.高次モードの影響を受けると、なぜ精度が上がるのか.

A. 固有振動数近傍においては、その固有モードが支配的になり、どこを加振してもほぼ同じ振動形状しか示さず、各点で計測される応答も近い値になる. よって周波数応答関数のランク落ちが発生し、周波数応答関数行列は悪条件になる. この場合の逆行列の計算は誤差の影響を受けやすく、同定される加振力は真値からはなれてしまう. しかし固有振動数近傍において、他モードの影響を受けることで、各点で計測される応答は異なる値になる. よって他モードの影響を受けることで周波数応答関数の悪条件は緩和され、入力同定精度が向上する.

Q2.ひずみ応答を用いた入力同定は低周波で有効というなら高次の影響は関係ないのではないか.

A. 本研究ではひずみ応答を用いた入力同定は、低周波数において有効であるとわかった. しかしひずみ応答が従来法よりも精度が良くなったのは、高次モードの剰余があったためであり、高次のモード、つまり高周波数は重要な要素である.

### ● 長谷先生

Q1.ひずみ応答について、先行研究で良いといわれているが明確な根拠は無いとしていた. 今回の研究で根拠は示されたのか. 根拠は何か.

A. これまでの研究ではひずみ応答が入力同定に有効である根拠は示されていなかった. そこで本研究ではボード線図を用いて、採用モード数を変化させることで、ひずみ応答は高次モードの影響を受けていることを示した. 入力同定においては他モードの影響を受けると精度が向上するという特性があるため、高次モードの影響を受けるひずみ応答は入力同定に有効である.

Q2.高次モードの影響を受けるのは何故か.

A. 式(2.104)を用いて **SFRF** が高次モードの影響を受ける理由を述べる. **SFRF** は高次において各固有モード成分に乗じる固有値  $\lambda_r$  が大きくなる. すると高次のモード成分の振幅が大きくなり、それらを重ね合わせることで低周波域により大きな影響が生じる. さらに加振点応答付近ではモード定数の符号がほぼ同符号になることによって、入力と応答がほぼ同相になり固有モード間には反共振点が生じるため、より低周波に影響が生じやすくなる. 以上の理由により、加振点における **SFRF** は高次モードの影響が大きくなったと考えられる.

$$H_{\varepsilon}(\omega) = -z \sum_{r=1}^a \left( \frac{\lambda_r}{l} \right)^2 \frac{W_r^{\varepsilon}(x) W_r^{\varepsilon}(\bar{x})}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_r \omega j) \rho A l} \quad (2.104)$$



Q3. センサーの影響にはあまり触れていないが、加速度計とひずみゲージ、それぞれ実際の物理量をどれだけ正確に測れているのか、考える必要があるのでは。

A. 今回の実験では piezo 素子が内蔵された「ひずみセンサー」使用しており、このセンサーの精度は第 5 章の図 5.8 の図より、そのデータの信頼性が明らかになっている。

● 青村先生

Q1. ひずみと加速度、原理原則で言ったら同じはず。ひずみと加速度が対応しないというのが、今回の結論なのではないか。

A. 「加速度」と「ひずみ」という物理量に着目すると、これらは「変位」をある変数で微分した量である。「加速度」は「時間」の 2 階微分であるのに対し、「ひずみ」は「変位」の 2 階微分である。つまり「加速度」と「ひずみ」はどちらも「変位」に起因する。しかし入力同定において「ひずみ」は「変位」で 2 階微分することで、「加速度」にはない高次モードの影響をもたらしているため、応答としてはこれら二つの物理量は対応していない。

## 謝辞

本論文の作成は多くの方々の支えによって完遂することが出来ました。この場を借りて厚く御礼申し上げます。

本論文の主査である吉村卓也教授には、お忙しい中研究相談を何度もしいただき、多くの知識やアドバイスを下さいました。おかげ様で多くの困難のあった研究を進めていくことが出来ました。ここに改めて感謝申し上げます。玉置元助教には実験を行う際にサポートして頂いたり、大変お世話になりました。感謝申し上げます。

本論文の副査を務めて下さいました長谷和徳教授、小口俊樹准教授には修士論文発表会において、的確なご指摘を頂きました。ここに御礼申し上げます。

2013 年度に修士課程を修了された高橋一善さんは、同じ入力同定を研究テーマとされていたことで、実験や理論について教えて頂いたりなど、大変お世話になりました。感謝申し上げます。

博士課程の渡邊さん、社会人博士の北原さん、また元社会人博士の坂田さん、元博士課程の朴さんには研究に関して様々な助言を頂きました。感謝申し上げます。

私の2年先輩の菊地さん、齊藤さん、武蔵さん、1年先輩の逢坂さん、高野さん、中野さん、松尾さんには研究や研究室生活(特にソフトボール大会)において大変お世話になり、多くのことを学ばせて頂きました。ありがとうございました。

私の1年後輩の栗田君、黄さん、中村君、山田君、2年後輩の石鍋君、宗君、迎さんとは、共に有意義な研究室生活を送ることが出来ました。ありがとうございました。これからも皆さんで研究室を盛り上げていってくれることを所望しております。

そして同期の小池君、千代君。同期の皆さんのおかげで3年間の研究室生活をととても楽しいものとする事が出来ました。ありがとうございました。